DM 5
à rendre sur cahier-de-prépa avant le 31/10 à 23h59

IMPORTANT. En début de DM, indiquer : la formule choisie, le temps passé, l'aide reçue (sur quelles questions et quel type d'aide : camarades, professeur, famille, internet, IA).

Formules.

1. **Bases.** Problèmes 1 et 2.
2. **Intermédiaire.** Problèmes 2 et 3.
3. **Plus avancé.** Problèmes 3 et 4.

Problème 1. Deux exos de la banque CCINP

EXERCICE 99 probabilités

1. Rappeler l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.
2. Soit (Y_n) une suite de variables aléatoires indépendantes, de même loi et et telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $Y_n \in L^2$.
   On pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} Y_k$.
   Prouver que : $\forall\, a \in]0, +\infty[$, $P\left(\left|\frac{S_n}{n} - E(Y_1)\right| \geqslant a\right) \leqslant \frac{V(Y_1)}{na^2}$.
3. **Application**
   On effectue des tirages successifs, avec remise, d'une boule dans une urne contenant 2 boules rouges et 3 boules noires.
   À partir de quel nombre de tirages peut-on garantir à plus de 95% que la proportion de boules rouges obtenues restera comprise entre $0,35$ et $0,45$?
   Indication : considérer la suite (Y_i) de variables aléatoires de Bernoulli où Y_i mesure l'issue du $i^{\text{ème}}$ tirage.

EXERCICE 109 probabilités

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Une urne contient n boules blanches numérotées de 1 à n et deux boules noires numérotées 1 et 2.
On effectue le tirage une à une, sans remise, de toutes les boules de l'urne.
On suppose que tous les tirages sont équiprobables.
On note X la variable aléatoire égale au rang d'apparition de la première boule blanche.
On note Y la variable aléatoire égale au rang d'apparition de la première boule numérotée 1.

1. Déterminer la loi de X.
2. Déterminer la loi de Y.

Problème 2. CCINP MP 2024 Maths 1

X est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ d'espérance finie.

Q1. Exprimer, pour k non nul, $P(X=k)$ en fonction de $P(X>k-1)$ et de $P(X>k)$.

Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=1}^{n} kP(X=k) = \sum_{k=0}^{n-1} P(X>k) - nP(X>n)$.

Démontrer le résultat de cours : $E(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(X>k)$.

Q2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Une urne contient n boules numérotées de 1 à n. On effectue, de façon équiprobable, p tirages successifs avec remise et on note X le plus grand nombre obtenu.
Calculer, pour tout entier naturel k, $P(X \leq k)$, puis donner la loi de X.

Q3. Calculer $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{k}{n}\right)^p$, puis en utilisant la **Q1**., déterminer un équivalent pour n au voisinage de $+\infty$ de $E(X)$.

Problème 3. Autour de la loi forte des grands nombres, CCINP PSI 2018

Notations et définitions

- $\mathbf{N}$ désigne l'ensemble des entiers naturels, $\mathbf{R}$ désigne celui des nombres réels.
- Si X est une variable aléatoire admettant une espérance, on note $\mathbf{E}(X)$ son espérance.

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ un espace probabilisé. Soit X une variable aléatoire discrète sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$, à valeurs dans $[-1, 1]$. On considère dans ce problème une suite $(X_i)_{i\in\mathbf{N}^*}$ de variables aléatoires *discrètes* sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$, *mutuellement indépendantes et de même loi que* X. Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on note :

$$S_n = \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n}.$$

Objectif

Montrer que si la variable aléatoire X est centrée ($\mathbf{E}(X) = 0$), alors la suite $(S_n)_{n\geq 1}$ converge presque-sûrement vers la constante 0. Il s'agit d'un cas particulier de la loi forte des grands nombres.

Q31. On ne suppose pas X centrée dans cette question. Montrer que X admet une espérance.

On suppose désormais que X est *centrée*.

Q32. Énoncer et démontrer l'inégalité de Markov pour une variable aléatoire finie Y sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$. Montrer que ce résultat est encore vrai lorsque Y est une variable aléatoire discrète non nécessairement finie.

Q33. En déduire que pour tout $\alpha > 0$:

$$\mathbf{P}(|X| \geq \alpha) \leq \frac{\mathbf{E}(|X|)}{\alpha}.$$

Q34. Montrer que pour tout $t > 0$, pour tout $\varepsilon > 0$ et pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on a :

$$\mathbf{P}(S_n \geq \varepsilon) = \mathbf{P}\left(e^{tnS_n} \geq e^{tn\varepsilon}\right) \leq \frac{\left(\mathbf{E}\left(e^{tX}\right)\right)^n}{e^{tn\varepsilon}}.$$

Majoration de $\mathbf{E}\left(e^{tX}\right)$

Q35. Soit $a > 1$. On considère la fonction g_a définie par :

$$\forall x \in \mathbf{R},\ g_a(x) = \frac{1-x}{2}a^{-1} + \frac{1+x}{2}a - a^x.$$

Montrer que la fonction g_a est dérivable sur $\mathbf{R}$ et que la fonction g_a' est décroissante sur $\mathbf{R}$. En déduire, en remarquant que $g_a(-1) = g_a(1) = 0$, que pour tout $x \in [-1, 1]$, $g_a(x) \geq 0$.

Q36. En déduire que pour tout $t > 0$ et pour tout $x \in [-1, 1]$ on a :

$$e^{tx} \leq \frac{1-x}{2}e^{-t} + \frac{1+x}{2}e^{t}.$$

Q37. En déduire que pour tout $t > 0$:

$$\mathbf{E}\left(e^{tX}\right) \leq \mathrm{ch}(t).$$

On utilisera que $\mathrm{e}^t = \sum_{n\geqslant 0} \frac{t^n}{n!}$ *et que* $\mathrm{ch}(t) = \frac{\mathrm{e}^t + \mathrm{e}^{-t}}{2} = \sum_{n\geqslant 0} \ldots$

Q38. Montrer que pour tout entier $k \in \mathbf{N}$ et tout $t \in \mathbf{R}$, on a :

$$\frac{t^{2k}}{(2k)!} \leq \frac{1}{k!}\left(\frac{t^2}{2}\right)^k.$$

En déduire que pour tout $t > 0$, on a :

$$\mathbf{E}\left(e^{tX}\right) \leq e^{\frac{t^2}{2}}.$$

Majoration de $\mathbf{P}(|S_n| \geq \varepsilon)$

Dans ce paragraphe, on considère un entier $n \in \mathbf{N}^*$ et un réel $\varepsilon > 0$.

Q39. Montrer que la fonction

$$t \in \mathbf{R} \mapsto e^{-nt\varepsilon + n\frac{t^2}{2}}$$

atteint un minimum en un point que l'on précisera.

Q40. En déduire que $\mathbf{P}(S_n \geq \varepsilon) \leq e^{-n\frac{\varepsilon^2}{2}}$, puis que :

$$\mathbf{P}(|S_n| \geq \varepsilon) \leq 2e^{-n\frac{\varepsilon^2}{2}}.$$

Conclusion

Q41. Montrer que pour tout réel $\varepsilon > 0$, la série de terme général $\mathbf{P}(|S_n| > \varepsilon)$ converge.

Q42. On fixe un réel $\varepsilon > 0$. On note, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$:

$$B_n = \bigcup_{m \geq n} \{\omega \in \Omega \,;\, |S_m(\omega)| > \varepsilon\}.$$

Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, B_n est un événement et que :

$$\mathbf{P}\left(\bigcap_{n \in \mathbf{N}^*} B_n\right) = 0.$$

Q43. Posons, pour tout $k \in \mathbf{N}^*$:

$$\Omega_k = \left\{\omega \in \Omega \,;\, \exists n \in \mathbf{N}^*,\ \forall m \geq n,\ |S_m(\omega)| \leq \frac{1}{k}\right\}.$$

Montrer que pour tout $k \in \mathbf{N}^*$, Ω_k est un événement.
Écrire l'ensemble $A = \left\{\omega \in \Omega \,;\, \lim_{n \to +\infty} S_n(\omega) = 0\right\}$ à l'aide des événements Ω_k, $k \in \mathbf{N}^*$.
En déduire que A est un événement.

Q44. Déduire des questions précédentes que :

$$\mathbf{P}(A) = 1.$$

Problème 4. Séries aléatoires, BECEAS 2016 Maths 1

On considère une suite $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ de variables aléatoires réelles discrètes, toutes définies sur le même espace probabilisé $(\Omega,\mathscr{A},\mathbf{P})$, **indépendantes**, **centrées** (c'est-à-dire d'espérance nulle) et possédant un moment d'ordre 2.
On **admet** qu'une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ converge si, et seulement si, on a

$$\forall\,\varepsilon>0\quad\exists N\in\mathbb{N}^*\quad\forall\,(n,p)\in\mathbb{N}^2\quad\Big(p\geqslant N\text{ et }n\geqslant N\Rightarrow|u_p-u_n|\leqslant\varepsilon\Big).$$

On pose, pour tout entier naturel n non nul, $S_n=\sum_{k=1}^{n}Y_k$ et on note $\mathscr{C}$ l'ensemble des $\omega\in\Omega$ pour lesquels la suite $\Big(S_n(\omega)\Big)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge.

A. `La convergence presque sûre`

1. On pose, pour tout $\varepsilon>0$, $B(\varepsilon)=\bigcup_{N=1}^{+\infty}\bigcap_{\substack{n\geqslant N\\p\geqslant N}}\Big[|S_n-S_p|\leqslant\varepsilon\Big]$.

a) **(i)** Justifier, pour tout $\varepsilon>0$, l'appartenance de $B(\varepsilon)$ à $\mathscr{A}$.
(ii) Établir l'égalité : $\mathscr{C}=\bigcap_{\varepsilon>0}B(\varepsilon)$.
(iii) Comparer les ensembles $B(\varepsilon)$ et $B(\varepsilon')$ quand $0<\varepsilon<\varepsilon'$.
(iv) Établir l'égalité : $\mathscr{C}=\bigcap_{k=1}^{+\infty}B(\frac{1}{k})$ et en déduire que $\mathscr{C}\in\mathscr{A}$.

2. **a)** Montrer que $\mathbf{P}(\mathscr{C})=1$ si, et seulement si, pour tout entier naturel k non nul,

$$\mathbf{P}\Big(B(\frac{1}{k})\Big)=1\,.$$

b) En déduire que $\mathbf{P}(\mathscr{C})=1$ si, et seulement si, pour tout $\varepsilon>0$,

$$\mathbf{P}\Big(\bigcap_{N=1}^{+\infty}\bigcup_{\substack{n\geqslant N\\p\geqslant N}}\Big[|S_p-S_n|>\varepsilon\Big]\Big)=0.$$

c) Montrer que $\mathbf{P}(\mathscr{C})=1$ si, et seulement si, pour tout $\varepsilon>0$, $\lim\limits_{N\to+\infty}\mathbf{P}\Big(\bigcup\limits_{\substack{n\geqslant N\\p\geqslant N}}\Big[|S_p-S_n|>\varepsilon\Big]\Big)=0$.

B. `Une inégalité`

Quand une variable aléatoire U, définie sur $(\Omega,\mathscr{A},\mathbf{P})$, a une espérance on note $\mathbf{E}(U)$ sa valeur.

Soit $\varepsilon>0$ et N un entier naturel non nul. On note T_N l'application qui, à chaque $\omega\in\Omega$, associe l'élément de $\mathbb{N}\cup\{+\infty\}$ défini par

$$T_N(\omega)=\inf\Big\{p\in\mathbb{N}^*;\,p>N\quad\text{et}\quad|S_p(\omega)-S_N(\omega)|>\varepsilon\Big\}$$

(avec la convention $\inf\emptyset=+\infty$).

1. **a)** Soit A un événement. Établir l'égalité : $\mathbf{E}(\mathbf{1}_A) = \mathbf{P}(A)$.

b) Déterminer, pour tout entier naturel N non nul et pour tout entier $p > N$, les valeurs des espérances $\mathbf{E}(S_p - S_N)$ et $\mathbf{E}((S_p - S_N)^2)$ en fonction des moments des Y_k.

2. Exprimer, pour tout entier $k > N$, l'ensemble $[T_N = k]$ à l'aide d'événements liés à différentes variables aléatoires S_i et en déduire que l'application T_N est une variable aléatoire.

3. **a)** Prouver, pour tout entier $k > N$, l'inégalité : $\varepsilon^2 \mathbf{P}([T_N = k]) \leqslant \mathbf{E}\Big((S_k - S_N)^2 \mathbf{1}_{[T_N=k]}\Big)$.

b) Soit p un entier strictement plus grand que N.
Justifier, pour tout $k \in [\![N+1, p]\!]$, l'indépendance des variables $S_p - S_k$ et $(S_k - S_N)\mathbf{1}_{[T_N=k]}$.

c) En déduire, pour tout $(p,k) \in \mathbb{N}^2$ vérifiant $N < k \leqslant p$, l'inégalité :

$$\varepsilon^2 \mathbf{P}([T_N = k]) \leqslant \mathbf{E}\Big((S_p - S_N)^2 \mathbf{1}_{[T_N=k]}\Big).$$

d) Prouver, pour tout entier $p > N$, l'inégalité :

$$\varepsilon^2 \sum_{k=N+1}^{p} \mathbf{P}([T_N = k]) \leqslant \sum_{i=N+1}^{p} \mathbf{E}(Y_i^2).$$

4. On suppose, de plus, que la série $\sum \mathbf{E}(Y_m^2)$ converge. Établir l'inégalité :

$$\mathbf{P}\Big(\bigcup_{p>N} \Big[|S_p - S_N| > \varepsilon\Big]\Big) \leqslant \frac{1}{\varepsilon^2} \sum_{i=N+1}^{+\infty} \mathbf{E}(Y_i^2).$$

C. `Le résultat`

On considère une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ de variables aléatoires réelles discrètes, toutes définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$, **indépendantes** et toutes de **même loi** que X_1. On suppose que la loi de la variable X_1 est donnée par

$$\mathbf{P}([X_1 = -1]) = \mathbf{P}([X_1 = 1]) = \frac{1}{2}.$$

On pose, pour tout entier naturel n non nul, $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{X_k}{k}$.

1. Prouver, pour tout entier naturel N non nul, l'inclusion

$$\bigcup_{\substack{n\geqslant N \\ p\geqslant N}} \Big[|S_p - S_n| > \varepsilon\Big] \subset \bigcup_{p>N} \Big[|S_p - S_N| > \frac{\varepsilon}{2}\Big].$$

2. Montrer que, presque sûrement, la série $\sum \frac{X_n}{n}$ converge, c'est-à-dire montrer que l'ensemble des $\omega \in \Omega$ pour lesquels la série $\sum \frac{X_n(\omega)}{n}$ converge est de probabilité 1.