DM 5
corrigé

Problème 1. Deux exos de la banque CCINP

Exercice 99

1. Soit $a \in]0,+\infty[$. Pour toute variable aléatoire X telle que $X \in L^2$, on a :
$P(|X-E(X)| \geqslant a) \leqslant \dfrac{V(X)}{a^2}$.

2. On pose $X = \dfrac{S_n}{n}$.
Par linéarité de l'espérance et comme toutes les variables Y_i ont la même espérance, on a $E(X) = E(Y_1)$.
De plus, comme les variables sont indépendantes, on a $V(X) = \dfrac{1}{n^2}V(S_n) = \dfrac{1}{n}V(Y_1)$.
Alors, en appliquant 1. à X, on obtient le résultat souhaité.

3. $\forall i \in \mathbb{N}^*$, on considère la variable aléatoire Y_i valant 1 si la $i^{\text{ème}}$ boule tirée est rouge et 0 sinon.
Y_i suit une loi de Bernoulli de paramètre p avec $p = \dfrac{2}{5} = 0,4$.
Les variables Y_i suivent la même loi, sont indépendantes et $\forall i \in \mathbb{N}^*$, $Y_i \in L^2$.
On a d'après le cours, $\forall i \in \mathbb{N}^*$, $E(Y_i) = 0,4$ et $V(Y_i) = 0,4(1-0,4) = 0,24$.
On pose $S_n = \sum_{i=1}^{n} Y_i$. S_n représente le nombre de boules rouges obtenues au cours de n tirages.
Alors $T_n = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} Y_i}{n}$ représente la proportion de boules rouges obtenues au cours de n tirages.
On cherche à partir de combien de tirages on a $P(0,35 \leqslant T_n \leqslant 0,45) > 0,95$.
Or $P(0,35 \leqslant T_n \leqslant 0,45) = P\left(0,35 \leqslant \dfrac{S_n}{n} \leqslant 0,45\right) = P\left(-0,05 \leqslant \dfrac{S_n}{n} - E(Y_1) \leqslant 0,05\right)$
$= P\left(\left|\dfrac{S_n}{n} - E(Y_1)\right| \leqslant 0,05\right) = 1 - P\left(\left|\dfrac{S_n}{n} - E(Y_1)\right| > 0,05\right)$.
On a donc $P(0,35 \leqslant T_n \leqslant 0,45) = 1 - P\left(\left|\dfrac{S_n}{n} - E(Y_1)\right| > 0,05\right)$.
Or, d'après la question précédente, $P\left(\left|\dfrac{S_n}{n} - E(Y_1)\right| \geqslant 0,05\right) \leqslant \dfrac{0,24}{n(0,05)^2}$.
Donc $P(0,35 \leqslant T_n \leqslant 0,45) \geqslant 1 - \dfrac{0,24}{n(0,05)^2}$.
Il suffit alors pour répondre au problème de chercher à partir de quel rang n, on a $1 - \dfrac{0,24}{n(0,05)^2} \geqslant 0,95$.
La résolution de cette inéquation donne $n \geqslant \dfrac{0,24}{0,05^3}$ c'est-à-dire $n \geqslant 1920$.

Exercice 109

1. $X(\Omega) = [\![1, 3]\!]$.
   $\forall\, i \in [\![1, n]\!]$, on note B_i la $i^{\text{ème}}$ boule blanche.
   $\forall\, i \in [\![1, 2]\!]$, on note N_i la $i^{\text{ème}}$ boule noire.
   On pose $E = \{B_1, B_2, ..., B_n, N_1, N_2\}$.
   Alors Ω est l'ensemble des permutations de E et donc $\text{card}(\Omega) = (n+2)!$.

   $(X = 1)$ correspond aux tirages des $(n+2)$ boules pour lesquels la première boule tirée est blanche.
   On a donc n possibilités pour le choix de la première boule blanche et donc $(n+1)!$ possibilités pour les tirages restants.
   Donc $P(X = 1) = \dfrac{n \times (n+1)!}{(n+2)!} = \dfrac{n}{n+2}$.

   $(X = 2)$ correspond aux tirages des $(n+2)$ boules pour lesquels la première boule tirée est noire et la seconde est blanche.
   On a donc 2 possibilités pour la première boule, puis n possibilités pour la seconde boule et enfin $n!$ possibilités pour les tirages restants.
   Donc $P(X = 2) = \dfrac{2 \times n \times (n)!}{(n+2)!} = \dfrac{2n}{(n+1)(n+2)}$.

   $(X = 3)$ correspond aux tirages des $(n+2)$ boules pour lesquels la première boule et la seconde boule sont noires.
   On a donc 2 possibilités pour la première boule, puis une seule possibilité pour la seconde et enfin $n!$ possibilités pour les boules restantes.
   Donc $P(X = 3) = \dfrac{2 \times 1 \times (n)!}{(n+2)!} = \dfrac{2}{(n+1)(n+2)}$.

   Autre méthode :
   Dans cette méthode, on ne s'interesse qu'aux "premières" boules tirées, les autres étant sans importance.
   $X(\Omega) = [\![1, 3]\!]$.

   $(X = 1)$ est l'événement : "obtenir une boule blanche au premier tirage".
   Donc $P(X = 1) = \dfrac{\text{nombre de boules blanches}}{\text{nombre de boules de l'urne}} = \dfrac{n}{n+2}$.

   $(X = 2)$ est l'événement : " obtenir une boule noire au premier tirage puis une boule blanche au second tirage".
   D'où $P(X = 2) = \dfrac{2}{n+2} \times \dfrac{n}{n+1} = \dfrac{2n}{(n+2)(n+1)}$, les tirages se faisant sans remise.

   $(X = 3)$ est l'événement : "obtenir une boule noire lors de chacun des deux premiers tirages puis une boule blanche au troisième tirage".
   D'où $P(X = 3) = \dfrac{2}{n+2} \times \dfrac{1}{n+1} \times \dfrac{n}{n} = \dfrac{2}{(n+2)(n+1)}$, les tirages se faisant sans remise.

2. $Y(\Omega) = [\![1, n+1]\!]$.
   Soit $k \in [\![1, n+1]\!]$.

L'événement $(Y=k)$ correspond aux tirages des $(n+2)$ boules où les $(k-1)$ premières boules tirées ne sont ni B_1 ni N_1 et la $k^{\text{ième}}$ boule tirée est B_1 ou N_1.
On a donc, pour les $(k-1)$ premières boules tirées , $\binom{n}{k-1}$ choix possibles de ces boules et $(k-1)!$ possibilités pour leur rang de tirage sur les $(k-1)$ premiers tirages, puis 2 possibilités pour le choix de la $k^{\text{ième}}$ boule et enfin $(n+2-k)!$ possibilités pour les rangs de tirage des boules restantes.

$$\text{Donc } P(Y=k) = \frac{\binom{n}{k-1} \times (k-1)! \times 2 \times (n+2-k)!}{(n+2)!} = \frac{2\dfrac{n!}{(n-k+1)!} \times (n+2-k)!}{(n+2)!}$$

$$\text{Donc } P(Y=k) = \frac{2(n+2-k)}{(n+1)(n+2)}.$$

Autre méthode :
$Y(\Omega) = [\![1, n+1]\!]$.

On note A_k l'événement " une boule ne portant pas le numéro 1 est tirée au rang k".

Soit $k \in [\![1, n+1]\!]$.
On a : $(Y=k) = A_1 \cap A_2 \cap .... \cap A_{k-1} \cap \overline{A_k}$.

Alors, d'après la formule des probabilités composées,
$P(Y=k) = P(A_1)P_{A_1}(A_2)...P_{A_1\cap A_2\cap...\cap A_{k-2}}(A_{k-1})P_{A_1\cap A_2\cap...\cap A_{k-1}}(\overline{A_k})$.

$$P(Y=k) = \frac{n}{n+2} \times \frac{n-1}{(n+2)-1} \times \frac{n-2}{(n+2)-2} \times ... \times \frac{n-(k-2)}{(n+2)-(k-2)} \times \frac{2}{(n+2)-(k-1)}$$

$$P(Y=k) = \frac{n}{n+2} \times \frac{n-1}{n+1} \times \frac{n-2}{n} \times ... \times \frac{n-k+2}{n-k+4} \times \frac{2}{n-k+3}.$$

$$P(Y=k) = 2\,\frac{n!}{(n-k+1)!} \times \frac{(n-k+2)!}{(n+2)!}.$$

$$P(Y=k) = \frac{2(n-k+2)}{(n+2)(n+1)}.$$

Problème 2. CCINP MP 2024 Maths 1

Q1. Soit $k \neq 0$. On a $\mathbb{P}(X=k) = \mathbb{P}(X>k-1) - \mathbb{P}(X>k)$.
Ainsi,

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} k\mathbb{P}(X=k) &= \sum_{k=1}^{n} k\mathbb{P}(X>k-1) - k\mathbb{P}(X>k)\\ &= \sum_{k=1}^{n} k\mathbb{P}(X>k-1) - \sum_{k=1}^{n} k\mathbb{P}(X>k)\\ &= \sum_{k=0}^{n-1}(k+1)\mathbb{P}(X>k) - \sum_{k=1}^{n} k\mathbb{P}(X>k)\\ &= \sum_{k=0}^{n-1}\mathbb{P}(X>k) - n\mathbb{P}(X>n).\end{aligned}$$

Ensuite, pour le résultat de cours :

- ou bien on refait la preuve de cours, avec des familles sommables (qui est bien plus simple...)
- ou bien on doit nécessairement démontrer que $n\mathbb{P}(X>n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Ceci est vrai car, comme X est d'espérance finie,

$$\sum_{k\geqslant n} k\mathbb{P}(X=k) \geqslant n\sum_{k\geqslant n}\mathbb{P}(X=k) \geqslant n\mathbb{P}(X\geqslant n) \geqslant n\mathbb{P}(X>n) \geqslant 0.$$

Mais, par convergence de la série $\sum_{k\geqslant n} k\mathbb{P}(X=k)$, on en déduit que $n\mathbb{P}(X>n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Ainsi, $\sum \mathbb{P}(X>k)$ converge et $\sum_{k\geqslant 0}\mathbb{P}(X>k) = \mathbb{E}(X)$.

Q2. Déjà, par définition, X est à valeurs dans $[\![1,n]\!]$. On note Y_i le résultat du i-ème tirage.On a $Y_i \sim \mathcal{U}([\![1,n]\!])$. On a alors $X = \max(Y_1, \dots, Y_p)$. Ainsi, pour $k \in [\![1,n]\!]$,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X \leqslant k) &= \mathbb{P}(Y_1 \leqslant k, \dots, Y_p \leqslant k)\\ &= \prod_{i=1}^{p} \mathbb{P}(Y_i \leqslant k) \text{ par indépendance.}\\ &= \mathbb{P}(Y_1 \leqslant k)^p\\ &= \left(\frac{k}{n}\right)^p.\end{aligned}$$

(pour $k > n$, cette probabilité est nulle)
On en déduit que, pour $k \in [\![1,n]\!]$,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X = k) = \mathbb{P}(X \leqslant k) - \mathbb{P}(X \leqslant k-1)&\\ = \left(\frac{k}{n}\right)^p - \left(\frac{k-1}{n}\right)^p.&\end{aligned}$$

Q3. Soit $f : x \mapsto x^p$, continue sur $[0,1]$. Par le théorème de convergence des sommes de Riemann,

$$\frac{1}{n}\sum k = 0^{n-1}\left(\frac{k}{n}\right)^p \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^1 x^p dx = \frac{1}{p+1}.$$

Ensuite, X admet bien une espérance car X est bornée. On a alors, par la question 1,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) &= \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}(X > k)\\ &= \sum_{k=0}^{n-1} 1 - \mathbb{P}(X \leqslant k)\\ &= \sum_{k=0}^{n-1} 1 - \left(\frac{k}{n}\right)^p\\ &= n - \sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{k}{n}\right)^p.\end{aligned}$$

Or,

$$\frac{1}{n}\mathbb{E}(X) = 1 - \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{k}{n}\right)^p \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1 - \frac{1}{p+1} = \frac{p}{p+1},$$

d'où $\mathbb{E}(X) \underset{n\to+\infty}{\sim} n\dfrac{p}{p+1}$.

Problème 3. Autour de la loi forte des grands nombres, CCINP PSI 2018

Q31. Comme X est à valeurs dans $[-1,1]$, on sait que $|X| \leqslant 1$, donc X est dans L^1.

Q32. Soit Y une variable aléatoire positive. L^1, $a > 0$. Alors $\mathbb{P}(Y \geqslant a) \leqslant \dfrac{\mathbb{E}(Y)}{a}$.
On le démontre en remarquant que, presque sûrement, $a\mathbb{1}_{Y\geqslant a} \leqslant Y\mathbb{1}_{Y\geqslant a} \leqslant Y$ (par positivité de Y), ce qui, par croissance de l'espérance, assure que

$$\mathbb{E}(a\mathbb{1}_{Y\geqslant a}) \leqslant \mathbb{E}(Y), \text{ i.e. } a\mathbb{P}(Y \geqslant a) \leqslant \mathbb{E}(Y),$$

ce qui est exactement l'inégalité de Markov. Il n'y a pas eu à distinguer le cas fini ou non...

Q33. La variable $|X|$ admettant une espérance et étant positive, le résultat s'ensuit immédiatement par inégalité de Markov.

Q34. Soit $t > 0$, $\varepsilon > 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Alors

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(S_n \geqslant \varepsilon) &= \mathbb{P}(\mathrm{e}^{tnS_n} \geqslant \mathrm{e}^{tn\varepsilon}) \text{ par stricte croissance de } x \mapsto \mathrm{e}^x \\ &\leqslant \frac{\mathbb{E}(\mathrm{e}^{tnS_n})}{\mathrm{e}^{tn\varepsilon}} \text{ par inégalité de Markov} \\ &\leqslant \frac{1}{\mathrm{e}^{tn\varepsilon}}\mathbb{E}\left(\prod_{i=1}^{n}\mathrm{e}^{tX_i}\right) \\ &\leqslant \frac{1}{\mathrm{e}^{tn\varepsilon}}\prod_{i=1}^{n}\mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{tX_i}\right) \text{ par indépendance et par le lemme des coalitions} \\ &\leqslant \frac{1}{\mathrm{e}^{tn\varepsilon}}\mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{tX}\right)^n \text{ car } X_1, \dots, X_n \text{ suivent la même loi,}\end{aligned}$$

d'où le résultat désiré.

Q35. La fonction g_a est dérivable sur x comme combinaison linéaire de fonctions dérivables. On a alors, pour tout x dans $\mathbb{R}$,

$$g_a'(x) = -\frac{a^{-1}}{2} + \frac{a}{2} - \ln(a)a^x.$$

Cette fonction est à nouveau dérivable, de dérivée $g_a'' : x \mapsto -\ln(a)^2 a^x < 0$, donc g_a' est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$. Mais $g_a(-1) = g_a(1) = 0$, ce qui signifie, par le théorème de Rolle, que g_a' s'annule au moins une fois en $b \in [-1, 1]$. Par stricte décroissance de g_a', g_a' est positive avant b et négative après.
On en déduit donc que g_a croît de -1 à b et décroit de b à 1, ce qui assure que g_a est positive sur $[-1, 1]$.

Q36. Soit $t > 0$ et $x \in [-1, 1]$. En prenant $a = \mathrm{e}^t$, on a, par la question précédente, $g_{\mathrm{e}^t}(x) \geqslant 0$, ce qui est exactement l'inégalité recherchée.

Q37. Je suis allé trop vite sur la lecture de l'énoncé : mon indication est sur la question qui suit. On a, pour tout ω dans Ω, $X(\omega) \in [-1, 1]$ donc, par la question précédente, $\mathrm{e}^{tX(\omega)} \leqslant \frac{1 - X(\omega)}{2}\mathrm{e}^{-t} + \frac{1 + X(\omega)}{2}\mathrm{e}^t$. Par croissance de l'exponentielle,

$$\mathbb{E}(\mathrm{e}^{tX}) \leqslant \frac{\mathrm{e}^{-t}}{2} - \mathbb{E}(X)\frac{\mathrm{e}^{-t}}{2} + \frac{\mathrm{e}^t}{2} + \frac{\mathbb{E}(X)}{2}\mathrm{e}^t = \frac{\mathrm{e}^t - \mathrm{e}^{-t}}{2} = \mathrm{ch}(t),$$

car X est d'espérance nulle.

Q38. Soit $k \in \mathbb{N}$ et $t \in \mathbb{R}$. Alors $t^{2k} \geqslant 0$, et

$$(2k)! = k! \times \prod_{i=k+1}^{2k} i \geqslant k! \times \prod_{i=k+1}^{2k} 2 = 2^k k!.$$

Ainsi, $\frac{t^{2k}}{(2k)!} \leqslant \frac{1}{k!}\left(\frac{t^2}{2}\right)^k$.
En sommant l'inégalité précédente de 0 à $+\infty$, il vient

$$\sum_{k\geqslant 0}\frac{t^{2k}}{(2k)!} \leqslant \sum_{k\geqslant 0}\frac{1}{k!}\left(\frac{t^2}{2}\right)^k,$$

c'est-à-dire $\mathrm{ch}(t) \leqslant \mathrm{e}^{\frac{t^2}{2}}$. Par la question précédente, on en déduit que

$$\mathbb{E}(\mathrm{e}^{tX}) \leqslant \mathrm{e}^{\frac{t^2}{2}}.$$

Q39. Notons $f : t \mapsto -nt\varepsilon + n\frac{t^2}{2}$. Par stricte croissance de l'exponentielle, trouver un minimum de f revient à trouver un minimum de e^f.
f est dérivable, de dérivée $t \mapsto -n\varepsilon + nt$, négative pour $t \leqslant \varepsilon$ et positive ensuite. Ainsi, f admet un minimum en ε, égal à $-n\frac{\varepsilon^2}{2}$. Ainsi, le minimum de $t \mapsto \mathrm{e}^{f(t)}$ est

$$\mathrm{e}^{-n\frac{\varepsilon^2}{2}}, \text{ atteint en } t = \varepsilon.$$

Q40. On conclut enfin que, pour tout $t > 0$,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(S_n \geqslant \varepsilon) &\leqslant \frac{\left(\mathbb{E}(\mathrm{e}^{tX})\right)^n}{\mathrm{e}^{tn\varepsilon}} \text{ par la question 34}\\ &\leqslant \frac{\mathrm{e}^{n\frac{t^2}{2}}}{\mathrm{e}^{tn\varepsilon}} \text{ par la question 38.}\end{aligned}$$

En prenant $t = \varepsilon$, on en déduit que

$$\mathbb{P}(S_n \geqslant \varepsilon) \leqslant \mathrm{e}^{-n\frac{\varepsilon^2}{2}}.$$

Puis, on peut écrire que

$$\mathbb{P}(|S_n| \geqslant \varepsilon) = \mathbb{P}(S_n \geqslant \varepsilon) + \mathbb{P}(-S_n \geqslant \varepsilon).$$

Or, $-S_n = \dfrac{-X_1 + (-X_2) + \cdots + (-X_n)}{n}$, où, pour tout i, $-X_i$ est centrée et à valeurs dans $[-1, 1]$, donc on a, par le même raisonnement que les questions précédentes,

$$\mathbb{P}(-S_n \geqslant \varepsilon) \leqslant \mathrm{e}^{-n\frac{\varepsilon^2}{2}},$$

d'où

$$\mathbb{P}(|S_n| \geqslant \varepsilon) = \mathbb{P}(S_n \geqslant \varepsilon) + \mathbb{P}(-S_n \geqslant \varepsilon) \leqslant 2\mathrm{e}^{-n\frac{\varepsilon^2}{2}}.$$

Q41. Soit $\varepsilon > 0$. On a

$$0 \leqslant \mathbb{P}(|S_n| \geqslant \varepsilon) \leqslant 2\mathrm{e}^{-n\frac{\varepsilon^2}{2}}.$$

Or, $\sum \mathrm{e}^{-n\frac{\varepsilon^2}{2}}$ converge : c'est une série géométrique de raison $\mathrm{e}^{-\frac{\varepsilon^2}{2}} \in]0, 1[$. Ainsi, par comparaison de séries à termes positifs, $\sum \mathbb{P}(|S_n| \geqslant \varepsilon)$ converge.

Q42. Soit $n \in \mathbb{N}$.
Si $m \geqslant n$, S_m est une variable aléatoire, donc $\{|S_m| > \varepsilon\}$ est bien un événement.
Ensuite, une réunion d'événements est un événement, donc B_n est un événement.
Enfin, pour tout n dans $\mathbb{N}$, $B_{n+1} \subset B_n$. Ainsi, par continuité décroissante,

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} B_n\right) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(B_n).$$

Or, par sous-additivité,

$$\mathbb{P}(B_n) \leqslant \sum_{m\geqslant n} \mathbb{P}(|S_m| > \varepsilon)$$

Mais, par convergence de $\sum \mathbb{P}(|S_m| > \varepsilon)$, on sait que $\sum_{m\geqslant n} \mathbb{P}(|S_m| > \varepsilon) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Ainsi, $\mathbb{P}(B_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} B_n\right) = 0.$$

Q43. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On peut écrire que

$$\Omega_k = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} \bigcap_{m\geqslant n} \left\{|S_m| \leqslant \frac{1}{k}\right\}.$$

Mais comme $\left\{|S_m| \leqslant \dfrac{1}{k}\right\}$ est un événement, on a, par intersection et réunion d'événements, le fait que Ω_k est un événement.
Si $\omega \in \Omega$, on sait, par définition, que

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty} S_n(\omega) = 0 &\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0,\ \exists n \in \mathbb{N},\ \forall m \geqslant n,\ |S_n(\omega)| \leqslant \varepsilon\\ &\Leftrightarrow \forall k \in \mathbb{N}^*,\ \exists n \in \mathbb{N},\ \forall m \geqslant n,\ |S_n(\omega)| \leqslant \frac{1}{k}\\ &\Leftrightarrow \forall k \in \mathbb{N},\ \omega \in \Omega_k\end{aligned}$$

Ainsi,

$$A = \bigcap_{k\in\mathbb{N}} \Omega_k,$$

qui est bien un événement.

Q44. Or, on a clairement $\Omega_{k+1} \subset \Omega_k$ donc, par continuité décroissante, on en déduit que $\mathbb{P}(A) = \lim_{k\to+\infty} \mathbb{P}(\Omega_k)$.

Or, comme $\Omega_k = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} \bigcap_{m\geqslant n} \left\{|S_m| \leqslant \frac{1}{k}\right\}$, on en déduit, par continuité croissante, que

$$\mathbb{P}(\Omega_k) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\bigcap_{m\geqslant n} \left\{|S_m| \leqslant \frac{1}{k}\right\}\right).$$

Enfin, on a vu, dans la question 42, que

$$\mathbb{P}\left(\overline{\bigcap_{m\geqslant n} \left\{|S_m| \leqslant \frac{1}{k}\right\}}\right) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{m\geqslant n} \left\{|S_m| > \frac{1}{k}\right\}\right) = 0,$$

donc $\mathbb{P}(\Omega_k) = 1$ pour tout k, donc $\mathbb{P}(A) = 1$.

Problème 4. Séries aléatoires, BECEAS 2016 Maths 1

Remarque 1 : la condition de convergence est le critère de Cauchy, qui est présent en exercice dans la feuille d'espaces vectoriels normés.

Remarque 2 : la première partie de ce problème explique mieux ce que l'on fait un peu + « avec les mains » à la fin du problème précédent.

A. La convergence presque sûre

1. (a) i. Soit $\varepsilon > 0$. Alors $|S_n - S_p|$ est une variable aléatoire, donc $\{|S_n - S_p| \leqslant \varepsilon\}$ est un événement. Par stabilité par intersection dénombrable, pour tout n et $p \geqslant N$, $\bigcap_{n\geqslant N, p\geqslant N} \{|S_n - S_p| \leqslant \varepsilon\}$ est un événement et, donc, par stabilité par réunion dénombrable, $B(\varepsilon)$ est un événement.

ii. Soit $\omega \in \Omega$. Alors on a les équivalences

$$\begin{aligned}
\omega \in \mathscr{C} &\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N}^*,\ \forall (n,p) \in \mathbb{N}^2,\ (p \geqslant N \text{ et } n \geqslant N \Rightarrow |S_p(\omega) - S_n(\omega)| \leqslant \varepsilon) \\
&\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N}^*,\ \forall n \geqslant N,\ \forall p \geqslant N,\ |S_p(\omega) - S_n(\omega)| \leqslant \varepsilon \\
&\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N}^*,\ \forall n \geqslant N,\ \forall p \geqslant N,\ \omega \in \{|S_p - S_n| \leqslant \varepsilon\} \\
&\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N}^*,\ \omega \in \bigcap_{n\geqslant N, p\geqslant N} \{|S_p - S_n| \leqslant \varepsilon\} \\
&\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0,\ \omega \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} \bigcap_{N\geqslant N, p\geqslant N} \{|S_p - S_n| \leqslant \varepsilon\} = B(\varepsilon) \\
&\Leftrightarrow \omega \in \bigcap_{\varepsilon>0} B(\varepsilon).
\end{aligned}$$

iii. Soit $\varepsilon < \varepsilon'$. Alors, pour tous n et p, pour tout ω dans Ω, $|S_n(\omega) - S_p(\omega)| \leqslant \varepsilon \Rightarrow |S_n(\omega) - S_p(\omega)| \leqslant \varepsilon'$. Ceci implique que $B(\varepsilon) \subset B(\varepsilon')$.

iv. Notons $\mathscr{D} = \bigcap_{k\geqslant 1} B\left(\frac{1}{k}\right)$. Déjà, si $\omega \in \mathscr{C}$, $\omega \in \mathscr{D}$ (car $\omega \in \mathscr{B}(\varepsilon)$ pour tout $\varepsilon \in]0, +\infty[$, donc pour tout $\varepsilon \in \left\{\frac{1}{k},\ k \in \mathbb{N}^*\right\}$.

Ensuite, si $\omega \in \mathscr{D}$, soit $\varepsilon > 0$. On dispose de k tel que $\frac{1}{k} < \varepsilon$. On a alors $B\left(\frac{1}{k}\right) \subset B(\varepsilon)$, donc $\omega \in B(\varepsilon)$.

Ainsi, $\omega \in \mathscr{C}$.

Ainsi, par stabilité par intersection dénombrable, $\mathscr{C} \in \mathscr{A}$.

2. (a) Si $\mathbb{P}(\mathscr{C}) = 1$, alors pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $1 \leqslant \mathbb{P}(\mathscr{C}) \leqslant \mathbb{P}\left(B\left(\frac{1}{k}\right)\right) \leqslant 1$, donc $\mathbb{P}\left(B\left(\frac{1}{k}\right)\right) = 1$.

Réciproquement, si, pour tout k, $\mathbb{P}\left(B\left(\frac{1}{k}\right)\right) = 1$, on a, par continuité décroissante, $\mathbb{P}(\mathscr{C}) = \lim\limits_{k\to+\infty} \mathbb{P}\left(B\left(\frac{1}{k}\right)\right) = 1$.

(b) Par le même raisonnement qu'en question 1, on sait que l'on a l'équivalence

$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}\left(B\left(\frac{1}{k}\right)\right) = 1 \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0,\ \mathbb{P}(B(\varepsilon)) = 1.$$

Ainsi, $\mathbb{P}(\mathscr{C}) = 1$ si, et seulement si pour tout $\varepsilon > 0$, $\mathbb{P}(B(\varepsilon)) = 1$, i.e. $\mathbb{P}(\overline{B(\varepsilon)}) = 1$, ce qui est exactement dire que $\forall \varepsilon > 0$,

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{N=1}^{+\infty} \bigcup_{\substack{n\geqslant N\\ p\geqslant N}} [|S_p - S_n| > \varepsilon]\right) = 0.$$

(c) Soit $N \in \mathbb{N}$. Alors

$$\bigcup_{\substack{n\geqslant N+1\\ p\geqslant N+1}} [|S_p - S_n| > \varepsilon] \subset \bigcup_{\substack{n\geqslant N\\ p\geqslant N}} [|S_p - S_n| > \varepsilon].$$

Par continuité décroissante, on en déduit que $\mathbb{P}(\mathscr{C}) = 1$ si, et seulement si pour tout $\varepsilon > 0$, $\lim\limits_{N\to+\infty} \mathbf{P}\left(\bigcup\limits_{\substack{n\geqslant N\\ p\geqslant N}} [|S_p - S_n| > \varepsilon]\right)$ 0.

B. Une inégalité

1. (a) La variable $\mathbb{1}_A$ est une variable de Bernoulli. Ainsi, $\mathbb{E}(\mathbb{1}_A) = 0 \times \mathbb{P}(\mathbb{1}_A = 0) + 1 \times \mathbb{P}(\mathbb{1}_A = 1) = \mathbb{P}(\mathbb{1}_A = 1) = \mathbb{P}(A)$ car, pour $\omega \in \Omega$, on a l'équivalence $\mathbb{1}_A(\omega) = 1 \Leftrightarrow \omega \in A$.

(b) Soit $N \in \mathbb{N}^*$. Alors

$$\mathbb{E}(S_p - S_N) = \mathbb{E}\left(\sum_{k=N+1}^{p} Y_k\right)$$

$$\boxed{= \sum_{k=N+1}^{p} \mathbb{E}(Y_k) = 0} \text{ par linéarité de l'espérance, et car les variables sont centrées.}$$

Ensuite,

$$\mathbb{E}((S_p - S_N)^2) = \mathbb{E}\left(\left(\sum_{k=N+1}^{p} Y_k\right)^2\right)$$

$$= \mathbb{E}\left(\sum_{k=N+1}^{p} Y_k^2 + 2 \sum_{N+1\leqslant i<j\leqslant p} Y_i Y_j\right)$$

$$= \sum_{k=N+1}^{p} \mathbb{E}(Y_k^2) + 2 \sum_{N+1\leqslant i<j\leqslant p} \mathbb{E}(Y_i Y_j) \text{ par linéarité de l'espérance.}$$

$$= \sum_{k=N+1}^{p} \mathbb{E}(Y_k^2) + 2 \sum_{N+1\leqslant i<j\leqslant p} \mathbb{E}(Y_i)\mathbb{E}(Y_j) \text{ par indépendance.}$$

$$\boxed{= \sum_{k=N+1}^{p} \mathbb{E}(Y_k^2).}$$

2. Soit $k > N$. Alors on a

$$\{T_n = k\} = \{|S_k - S_N| > \varepsilon\} \cap \bigcap_{p=N+1}^{k-1} \{|S_p - S_N| \leqslant \varepsilon\}.$$

Par stabilité par réunion et intersection finie, $\{T_n = k\}$ est un événement. Ensuite,

$$\{T_n = +\infty\} = \bigcup_{p \geqslant N+1} \{|S_p - S_N| \leqslant \varepsilon\},$$

qui est aussi un événement. Ainsi, T_n est bien une variable aléatoire.

3. (a) Soit $k > N$ et $\omega \in \Omega$. Alors

- si $T_N(\omega) \neq k$, on a $(S_k(\omega) - S_N(\omega))^2 \mathbb{1}_{T_N=k}(\omega) = 0 \geqslant \varepsilon^2 \mathbb{1}_{T_N=k}(\omega)$
- Si $T_N(\omega) = k$, on a, par définition, $|S_k(\omega) - S_N(\omega)| > \varepsilon$, d'où $(S_k(\omega) - S_N(\omega))^2 \mathbb{1}_{T_N=k}(\omega) \geqslant \varepsilon^2 \mathbb{1}_{T_N=k}(\omega)$.

On en déduit que, presque sûrement, on a $\varepsilon^2 \mathbb{1}_{T_n=k} \leqslant (S_k - S_N)^2 \mathbb{1}_{T_n=k}$. Par croissance de l'espérance, on en déduit que

$$\mathbb{E}\left(\varepsilon^2 \mathbb{1}_{T_N=k}\right) \leqslant \mathbb{E}\left((S_k - S_N)^2 \mathbb{1}_{T_N=k}\right),$$

donc que

$$\varepsilon^2 \mathbb{P}(T_N = k) \leqslant \mathbb{E}\left((S_k - S_N)^2 \mathbb{1}_{T_N=k}\right).$$

(b) On remarque que $S_p - S_k = \sum_{i=k+1}^{p} Y_i$, et que

$$\begin{aligned}(S_k - S_N)\mathbb{1}_{T_N=k} &= \left(\sum_{i=N+1}^{k} Y_i\right) \mathbb{1}_{Y_{N+1} \leqslant \varepsilon, \ldots, Y_{k-1} \leqslant \varepsilon, Y_k > \varepsilon} \\ &= f(Y_{N+1}, \ldots, Y_k)\end{aligned}$$

Ainsi, par le lemme des coalitions, comme les $(Y_i)_{i \in \mathbb{N}}$ sont mutuellement indépendants, $S_p - S_k$ et $(S_k - S_N)\mathbb{1}_{T_N=k}$ sont indépendants.

(c) On écrit que

$$\begin{aligned}(S_p - S_N)^2 \mathbb{1}_{T_N=k} &= (S_p - S_k + S_k - S_N)^2 \mathbb{1}_{T_N=k} \\ &= (S_p - S_k)^2 \mathbb{1}_{T_N=k} + 2(S_p - S_k)(S_k - S_N)\mathbb{1}_{T_N=k} + (S_k - S_N)^2 \mathbb{1}_{T_N=k}.\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left((S_p - S_N)^2 \mathbb{1}_{T_N=k}\right) &= \mathbb{E}\left((S_p - S_k)^2 \mathbb{1}_{T_N=k} + 2(S_p - S_k)(S_k - S_N)\mathbb{1}_{T_N=k} + (S_k - S_N)^2 \mathbb{1}_{T_N=k}\right) \\ &= \mathbb{E}\left((S_p - S_k)^2 \mathbb{1}_{T_N=k}\right) + 2\mathbb{E}\left((S_p - S_k)(S_k - S_N)\mathbb{1}_{T_N=k}\right) + \mathbb{E}\left((S_k - S_N)^2 \mathbb{1}_{T_N=k}\right) \\ &= \mathbb{E}\left((S_p - S_k)^2 \mathbb{1}_{T_N=k}\right) + 2\mathbb{E}\left(S_p - S_k\right)\mathbb{E}\left((S_k - S_N)\mathbb{1}_{T_N=k}\right) + \mathbb{E}\left((S_k - S_N)^2 \mathbb{1}_{T_N=k}\right) \text{ par indéper} \\ &= \mathbb{E}\left((S_p - S_k)^2 \mathbb{1}_{T_N=k}\right) + \mathbb{E}\left((S_k - S_N)^2 \mathbb{1}_{T_N=k}\right) \text{ par la question 1.b)} \\ &\geqslant \mathbb{E}\left((S_k - S_N)^2 \mathbb{1}_{T_N=k}\right).\end{aligned}$$

Ainsi, par cette inégalité et la question 3.a, on a le résultat.

(d) Soit $p > N$. Alors, par la question précédente,

$$\begin{aligned}\varepsilon^2 \sum_{k=N+1}^{p} \mathbb{P}(T_N = k) &\leqslant \sum_{k=N+1}^{p} \mathbb{E}\left((S_p - S_N)^2 \mathbb{1}_{T_N=k}\right) \\ &\leqslant \mathbb{E}\left((S_p - S_N)^2 \sum_{k=N+1}^{p} \mathbb{1}_{T_N=k}\right).\end{aligned}$$

Mais $\sum_{k=N+1}^{p} \mathbb{1}_{T_N=k} \leqslant 1$ car les $\{T_N = k\}$ sont incompatibles. Ainsi,

$$\varepsilon^2 \sum_{k=N+1}^{p} \mathbb{P}(T_N = k) \leqslant \mathbb{E}\left((S_p - S_N)^2\right) = \sum_{i=N+1}^{p} \mathbb{E}(Y_i^2) \text{ par la question 1.b.}$$

4. Par la question précédente, en travaillant dans $[0, +\infty]$,

$$\varepsilon^2 \sum_{k=N+1}^{+\infty} \mathbb{P}(T_N = k) \leqslant \sum_{i=N+1}^{+\infty} \mathbb{E}(Y_i^2).$$

Mais

$$\sum_{k=N+1}^{+\infty} \mathbb{P}(T_N = k) = \mathbb{P}(T_N \neq +\infty)$$

(en effet, l'ensemble des valeurs prises par T_N est $[\![N+1, +\infty]\!]$: ici on somme sur toutes les valeurs finies prises par T_N) D'où

$$\begin{aligned}\sum_{k=N+1}^{+\infty} \mathbb{P}(T_N = k) = \mathbb{P}(T_N \neq +\infty) &= \mathbb{P}\left(\overline{\bigcap_{p>N} \{|S_p - S_N| \leqslant \varepsilon\}}\right) \\ &= \mathbb{P}\left(\bigcup_{p>N} \{|S_p - S_N| < \varepsilon\}\right).\end{aligned}$$

D'où le résultat !

C. Le résultat

1. Soit $N \in \mathbb{N}^*$. Soit $\omega \in \bigcup_{\substack{n\geqslant N\\ p\geqslant N}} [|S_p - S_n| > \varepsilon]$. Alors on dispose de n et p supérieurs ou égaux à N tels que $|S_p(\omega) - S_n(\omega)| > \varepsilon$. Or, si on avait $|S_p(\omega) - S_N(\omega)| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2}$ et $|S_n(\omega) - S_N(\omega)| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2}$, alors on aurait $|S_p(\omega) - S_n(\omega)| \leqslant \varepsilon$. Donc l'un des deux est $> \dfrac{\varepsilon}{2}$, ce qui prouve que $\omega \in \bigcup_{p>N} \left[|S_p - S_N| > \dfrac{\varepsilon}{2}\right]$.

2. On rappelle qu'on a noté $\mathscr{C}$ l'événement qui nous intéresse, avec $Y_k = \dfrac{X_k}{k}$. Par la question A.2.c, $\mathbb{P}(\mathscr{C}) = 1$ si, et seulement si pour tout $\varepsilon > 0$, $\lim\limits_{N\to+\infty} \mathbf{P}\left(\bigcup_{\substack{n\geqslant N\\ p\geqslant N}} [|S_p - S_n| > \varepsilon]\right) = 0$.

Soit $\varepsilon > 0$. Soit $N \in \mathbb{N}^*$. Alors

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\bigcup_{\substack{n\geqslant N\\ p\geqslant N}} [|S_p - S_n| > \varepsilon]\right) &\leqslant \mathbb{P}\left(\bigcup_{p>N} \left[|S_p - S_N| > \frac{\varepsilon}{2}\right]\right) \text{ par la C.1} \\ &\leqslant \frac{1}{\varepsilon^2} \sum_{i=N+1}^{+\infty} \mathbf{E}\left(Y_i^2\right) \text{ par la B.4, car } \mathbb{E}(Y_i^2) = \frac{1}{k^2} \\ &\leqslant \frac{1}{\varepsilon^2} \sum_{i\geqslant N+1} \frac{1}{k^2} \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} 0.\end{aligned}$$

Le résultat est ainsi prouvé !