MP – Programme de colles
Semaine 06 – du 2 au 7 novembre 2026

Programme en bref

— cours sur les probabilités

— exercices sur les probabilités, en insistant un peu plus sur les lois des variables aléatoires (le TD sur les moments a lieu le mardi de la rentrée) **Attention ! Nous n'avons pas fait de fonctions génératrices !**

Exemples de questions de cours ou d'exercices très classiques

1. (exo classique) La loi géométrique est la seule loi sans mémoire.
2. Formules des probabilités composées, des probabilités totales, de Bayes (énoncés, preuves au choix de la colleuse ou du colleur)
3. Si $(X_1, \dots, X_n)$ sont des vaiid de Bernoulli de paramètre p, $X_1 + \cdots + X_n \sim \mathscr{B}(n, p)$.
4. (exo classique) Loi de la somme de deux variables de Poisson (de paramètres différents).
5. (exo classique) Loi et espérance du minimum de deux variables géométriques (de même paramètre).
6. Espérances usuelles (loi au choix)
7. Variances usuelles (sauf celle d'une variable géométrique, c'est faisable mais un peu pénible...)
8. Inégalité de Cauchy-Schwarz pour l'espérance, cas d'égalité.
9. Inégalités de Markov et de Bienaymé-Tchebycheff.
10. Inégalité de Bienaymé-Tchebycheff et loi faible des grands nombres.

Programme en détail (extraits du programme officiel)

Variables aléatoires discrètes

Cette section généralise aux variables aléatoires discrètes l'étude menée en première année des variables aléatoires à valeurs dans un ensemble fini. Cette généralisation nécessite d'introduire des notions générales de théorie des probabilités, lesquelles font l'objet d'un exposé a minima. En particulier :

— *la notion de tribu, introduite pour donner un cadre rigoureux, n'appelle aucun développement théorique ;*

— *la construction d'espaces probabilisés n'est pas un objectif du programme ;*

— *les diverses notions de convergence (presque sûre, en probabilité, en loi) sont hors programme.*

La théorie des familles sommables permet une extension très naturelle des notions et résultats vus en première année. Cette extension est effectuée rapidement, de manière à libérer du temps pour les exemples et exercices. L'objectif de l'enseignement est en effet de renforcer la compréhension de l'aléatoire, en lien avec d'autres parties du programme. On pourra ainsi faire travailler les étudiants sur divers objets aléatoires (permutations, graphes, matrices...) les inégalités de concentration et des exemples de processus à temps discret (marches aléatoires, chaînes de Markov...).

La notion de variable à densité est hors programme.

La notion d'espérance conditionnelle est hors programme.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Ensembles dénombrables	
Un ensemble est dit dénombrable s'il est en bijection avec $\mathbb{N}$.	Les parties infinies de $\mathbb{N}$ sont dénombrables.
Un ensemble est fini ou dénombrable si et seulement s'il est en bijection avec une partie de $\mathbb{N}$.	Un tel ensemble est dit au plus dénombrable.
Un produit cartésien fini d'ensembles dénombrables est dénombrable. Une réunion finie ou dénombrable d'ensembles finis ou dénombrables est finie ou dénombrable.	Les démonstrations ne sont pas exigibles. Les ensembles $\mathbb{N}^p$ ($p \in \mathbb{N}^*$), $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Q}$ sont dénombrables. Le support d'une famille sommable de nombres complexes est dénombrable.
L'ensemble $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable.	La démonstration n'est pas exigible.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES

b) Espaces probabilisés

Tribu sur un ensemble Ω. Espace probabilisable $(\Omega, \mathscr{A})$.

La manipulation de tribus n'est pas un objectif du programme.

Événements.

Généralisation du vocabulaire relatif aux événements introduit en première année.

Probabilité sur un espace probabilisable, σ-additivité.
Espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$.
Continuité croissante, continuité décroissante.

Application : pour une suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'événements (non nécessairement monotone), limites quand n tend vers l'infini de

$$P\Big(\bigcup_{k=0}^{n} A_k\Big) \quad \text{et} \quad P\Big(\bigcap_{k=0}^{n} A_k\Big).$$

Propriété de sous-additivité de P pour une réunion dénombrable d'événements.
Événements négligeables, événements presque sûrs. Une réunion (resp. intersection) finie ou dénombrable d'événements négligeables (resp. presque sûrs) est un événement négligeable (resp. presque sûr).

Systèmes quasi-complets d'événements.
Tout développement supplémentaire sur ces notions est hors programme.

c) Probabilités conditionnelles et indépendance

Extension des résultats vus en première année : probabilité conditionnelle, formule des probabilités composées, formule des probabilités totales, formule de Bayes.

Notations $P_B(A), P(A|B)$.

Par définition, les événements A et B sont indépendants si $P(A\cap B) = P(A)P(B)$.
Famille d'événements indépendants.

Lorsque $P(B) > 0$, l'indépendance de A et B s'écrit $P(A\,|\,B) = P(A)$.
L'indépendance deux à deux n'implique pas l'indépendance.

Si A et B sont indépendants, A et $\overline{B}$ le sont aussi.

d) Espaces probabilisés discrets

Si Ω est un ensemble, une distribution de probabilités discrètes sur Ω est une famille d'éléments de $\mathbb{R}^+$ indexée par Ω et de somme 1.

Support d'une distribution de probabilités discrète ; le support est au plus dénombrable.

Probabilité définie sur $\mathscr{A} = \mathscr{P}(\Omega)$ associée à une distribution de probabilités discrètes sur Ω.

Si Ω est au plus dénombrable, on obtient ainsi toutes les probabilités sur $\mathscr{P}(\Omega)$.

e) Variables aléatoires discrètes

Une variable aléatoire discrète X définie sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ et à valeurs dans E est une application définie sur Ω, à valeurs dans l'ensemble E, telle que $X(\Omega)$ soit au plus dénombrable et que, pour tout $x \in X(\Omega)$, l'ensemble $X^{-1}(\{x\})$ appartienne à $\mathscr{A}$.

Notations $(X = x)$, $(X \in A)$, $\{X = x\}$, $\{X \in A\}$.
Lorsque $E = \mathbb{R}$, la variable aléatoire X est dite réelle.
Notations $(X \leqslant x), (X \geqslant x), (X < x), (X > x)$ (et analogues avec accolades) pour une variable aléatoire réelle X.

Loi P_X d'une variable aléatoire discrète X.

La loi de X peut au besoin être définie sur un ensemble contenant $X(\Omega)$.

Dans ce qui suit, toutes les variables aléatoires sont supposées discrètes.

La probabilité P_X est déterminée par la distribution de probabilités discrète $(P(X = x))_{x\in X(\Omega)}$.
Notation $X \sim Y$.

La notation $X \sim Y$ ne suppose pas que X et Y sont définies sur le même espace probabilisé.

Variable aléatoire $f(X)$.
Si $X \sim Y$ alors $f(X) \sim f(Y)$.
Loi conditionnelle d'une variable aléatoire X sachant un événement A.

Contenus	Capacités & Commentaires
Couple de variables aléatoires. Loi conjointe, lois marginales. Détermination des lois marginales à partir de la loi conjointe.	Un couple est une variable aléatoire à valeurs dans un produit. Notation $P(X=x, Y=y)$. Extension aux n-uplets de variables aléatoires.

f) Variables aléatoires indépendantes

Couple de variables aléatoires indépendantes, famille finie de variables aléatoires indépendantes.	Notation $X \perp\!\!\!\perp Y$. Les variables aléatoires X et Y sont indépendantes si et seulement si la distribution de probabilités de (X,Y) est le produit des distributions de probabilités de X et Y. Extension aux n-uplets de variables aléatoires.
Famille quelconque de variables aléatoires indépendantes.	
Fonctions de variables aléatoires indépendantes : si $X \perp\!\!\!\perp Y$, alors $f(X) \perp\!\!\!\perp g(Y)$	Extension au cas de plus de deux variables.
Lemme des coalitions : si les variables aléatoires $X_1, \dots, X_n$ sont indépendantes, les variables aléatoires $f(X_1, \dots, X_m)$ et $g(X_{m+1}, \dots, X_n)$ le sont aussi.	Extension au cas de plus de deux coalitions.
Existence d'espaces probabilisés portant une suite de variables indépendantes de lois discrètes données.	La démonstration est hors programme. Suites i.i.d. Modélisation du jeu de pile ou face infini : suite i.i.d. de variables de Bernoulli.

g) Lois usuelles

Pour p dans $]0,1[$, loi géométrique de paramètre p. Variable géométrique de paramètre p.	Notations $\mathscr{G}(p)$, $X \sim \mathscr{G}(p)$. Interprétation comme rang du premier succès dans le jeu de pile ou face infini.
Pour λ dans $\mathbb{R}_+^*$, loi de Poisson de paramètre λ. Variable de Poisson de paramètre λ.	Notations $\mathscr{P}(\lambda)$, $X \sim \mathscr{P}(\lambda)$. Interprétation en termes d'événements rares.

h) Espérance d'une variable aléatoire réelle ou complexe

Si X est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$, l'espérance de X est la somme, dans $[0,+\infty]$, de la famille $(x\,P(X=x))_{x \in X(\Omega)}$. Pour une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$, égalité $\mathrm{E}(X) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(X \geqslant n)$.	Notation $\mathrm{E}(X)$.
Une variable aléatoire complexe X est dite d'espérance finie si la famille $(x\,P(X=x))_{x \in X(\Omega)}$ est sommable ; dans ce cas, la somme de cette famille est l'espérance de X.	Notation $\mathrm{E}(X)$. Variables centrées. La notation $X \in L^1$ signifie que X est d'espérance finie. On ne soulèvera aucune difficulté quant à la définition précise de L^1.
Espérance d'une variable géométrique, d'une variable de Poisson.	
Formule de transfert : soit X une variable aléatoire discrète, f une fonction définie sur $X(\Omega)$ à valeurs complexes ; alors $f(X)$ est d'espérance finie si et seulement si la famille $\big(f(x)\,P(X=x)\big)_{x \in X(\Omega)}$ est sommable ; si tel est le cas : $\mathrm{E}\big(f(X)\big) = \sum_{x \in X(\Omega)} f(x)\,P(X=x)$.	
Linéarité, positivité, croissance, inégalité triangulaire.	Caractérisation des variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ d'espérance nulle.
Si $\lvert X \rvert \leqslant Y$ et si $Y \in L^1$, alors $X \in L^1$.	
Si X et Y sont dans L^1 et indépendantes, alors XY est dans L^1 et : $\mathrm{E}(XY) = \mathrm{E}(X)\,\mathrm{E}(Y)$.	Extension au cas de n variables aléatoires.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES

i) Variance d'une variable aléatoire réelle, écart type et covariance

Si $\mathrm{E}\left(X^2\right) < +\infty$, X est d'espérance finie.

Inégalité de Cauchy-Schwarz : si X et Y sont dans L^2, XY est dans L^1 et $\mathrm{E}(XY)^2 \leqslant \mathrm{E}\left(X^2\right)\mathrm{E}\left(Y^2\right)$.
Pour $X \in L^2$, variance et écart type de X.

Relation $\mathrm{V}(X) = \mathrm{E}\left(X^2\right) - \mathrm{E}(X)^2$.

Relation $\mathrm{V}(aX+b) = a^2\mathrm{V}(X)$.

Variance d'une variable géométrique, d'une variable de Poisson.
Covariance de deux variables aléatoires de L^2.
Relation $\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathrm{E}(XY) - \mathrm{E}(X)\mathrm{E}(Y)$. Cas de variables indépendantes.
Variance d'une somme de n variables aléatoires, cas de variables décorrélées.

La notation $X \in L^2$ signifie que X^2 est d'espérance finie. On ne soulèvera aucune difficulté quant à la définition précise de L^2.
Cas d'égalité.

Notations $\mathrm{V}(X), \sigma(X)$. Variables réduites.
Caractérisation des variables aléatoires de variance nulle.

Si $\sigma(X) > 0$, la variable aléatoire $\dfrac{X - \mathrm{E}(X)}{\sigma(X)}$ est centrée réduite.

j) Inégalités probabilistes et loi faible des grands nombres

Inégalité de Markov.
Inégalité de Bienaymé-Tchebychev.
Loi faible des grands nombres : si $(X_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite i.i.d. de variables aléatoires de variance finie, alors, pour tout $\varepsilon > 0$,

$$P\left(\left|\frac{S_n}{n} - m\right| \geqslant \varepsilon\right) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

où $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$ et $m = \mathrm{E}(X_1)$.

Utilisation des inégalités de Markov et de Bienaymé-Tchebychev pour établir des inégalités de concentration.