MP – Programme de colles
Semaine 07 – du 9 au 16 novembre 2026

Programme en bref

— cours sur les suites et séries de fonctions. Remarque : la quasi-totalité du cours a été faite avec des fonctions de $I \subset \mathbb{R}$ dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On ne parle de fonctions à valeurs dans un evn qu'en remarque en fin de cours.

— exercices sur toutes les probabilités (en insistant sur le moments et les inégalités probabilistes) **Attention ! Nous n'avons pas fait de fonctions génératrices !** Éventuellement des exercices de base sur les suites/séries de fonctions (une détermination de CVS/CVU/CVN)

Exemples de questions de cours ou d'exercices très classiques

1. La convergence uniforme d'une suite de fonctions implique la convergence simple vers la même limite ; la convergence normale d'une série de fonctions $\sum u_n$ implique la convergence uniforme de cette dernière (et la convergence absolue de $\sum u_n(x)$ pour tout x.
2. Une limite uniforme de fonctions continues est continue.
3. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues sur I convergeant uniformément sur tout segment de I vers f, et soit $a \in$ I. Alors la suite de fonctions $\left(x \mapsto \int_a^x f_n(t)dt\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur tout segment de I vers $x \mapsto \int_a^x f(t)dt$.
4. Limite uniforme et dérivabilité.
5. Approximation uniforme d'une fonction continue sur un segment par une suite de fonctions en escalier.
6. Convergence simple, non convergence uniforme sur $[0,1]$ de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\forall x \in [0,1]$, $f_n(x) = nx^n(1-x)$.
7. La fonction ζ est $\mathscr{C}^\infty$ sur $]1,+\infty[$.
8. Soit $f \in \mathscr{C}([0,1],\mathbb{R})$ telle que pour tout n dans $\mathbb{N}$, $\int_0^1 t^n f(t)dt = 0$. Alors f est nulle.

Programme en détail (extraits du programme officiel)

Variables aléatoires discrètes

Révisions sur le programme précédent.

Suites et séries de fonctions

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Convergence simple, convergence uniforme	
Convergence simple d'une suite de fonctions. Convergence uniforme. La convergence uniforme entraîne la convergence simple.	Pour des fonctions bornées, interprétation en termes de norme.
b) Continuité, double limite	
Si les u_n sont continues en a et si (u_n) converge uniformément vers u sur A, alors u est continue en a. En particulier, toute limite uniforme de fonctions continues sur A est continue sur A. Théorème de la double limite : soit (u_n) une suite de fonctions de A dans F convergeant uniformément vers u sur A, et soit a un point adhérent à A ; si, pour tout n, u_n admet une limite ℓ_n en a, alors (ℓ_n) admet une limite ℓ et $u(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \ell$.	Le théorème s'applique dans le cas où l'hypothèse de convergence uniforme est satisfaite de façon locale, en particulier sur tout segment. En pratique, on vérifie la convergence uniforme sur des intervalles adaptés à la situation. La démonstration est hors programme. Adaptation, si $A \subset \mathbb{R}$, aux cas où $a = +\infty$ et $a = -\infty$.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
c) Intégration d'une limite uniforme sur un segment	
Soit (u_n) une suite de fonctions continues définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans F, a un point de I. On suppose que (u_n) converge uniformément sur tout segment de I vers une fonction u. Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in I$ soit $$U_n(x) = \int_a^x u_n, \quad U(x) = \int_a^x u.$$ Alors (U_n) converge uniformément vers U sur tout segment de I.	En particulier, si (u_n) converge uniformément vers u sur le segment $[a,b]$, alors : $\int_a^b u_n \to \int_a^b u$.
d) Dérivation d'une suite de fonctions	
Soit (u_n) une suite de fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, à valeurs dans F. Si (u_n) converge simplement sur I vers une fonction u, et si (u_n') converge uniformément sur tout segment de I vers une fonction v, alors (u_n) converge uniformément vers u sur tout segment de I, u est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I et $u' = v$.	En pratique, on vérifie la convergence uniforme de (u_n') sur des intervalles adaptés à la situation.
Extension aux suites de fonctions de classe $\mathscr{C}^k$, sous l'hypothèse de convergence simple de $(u_n^{(j)})$ pour $0 \leqslant j \leqslant k-1$ et de convergence uniforme sur tout segment de $(u_n^{(k)})$.	En pratique, on vérifie la convergence uniforme de $(u_n^{(k)})$ sur des intervalles adaptés à la situation.
e) Séries de fonctions	
Convergence simple, convergence uniforme. Une série de fonctions converge uniformément si et seulement si elle converge simplement et si la suite de ses restes converge uniformément vers 0. Adaptation des résultats des paragraphes précédents au cas des séries de fonctions.	
Convergence normale d'une série de fonctions. La convergence normale implique la convergence uniforme.	La convergence normale implique la convergence absolue en tout point. Exemples d'études de fonctions définies comme sommes de séries : régularité, étude asymptotique, utilisation de la comparaison série-intégrale.
f) Approximation uniforme	
Approximation uniforme d'une fonction continue par morceaux sur un segment par des fonctions en escalier. Théorème de Weierstrass : toute fonction continue sur un segment S et à valeurs dans $\mathbb{K}$ est limite uniforme sur S de fonctions polynomiales à coefficients dans $\mathbb{K}$.	La démonstration n'est pas exigible.