MP – Programme de colles
Semaine 04 – du 5 au 9 octobre 2026

Programme en bref

— cours sur les compléments d'algèbre linéaire et sur les normes

— exercices d'algèbre linéaire (y compris les déterminants). Sur les polymômes d'endomorphisme, absolument **zéro réduction**. Le polynôme minimal a été simplement défini, on a remarqué qu'en dimension finie, l'idéal annulateur était non vide, et on a calculé des puissances d'une matrice en connaissant un polynôme annulateur.
Colles à partir du jeudi : possibilité de mettre des normes (mais cela sera le cœur de la colle suivante).

Exemples de questions de cours ou d'exercices très classiques

1. Idéaux de $\mathbb{Z}$ ou de $\mathbb{K}[X]$
2. Si $u \in \mathscr{L}(E)$ de dimension finie, u admet au moins un polynôme annulateur. L'idéal annulateur de u est alors un idéal, et il est non nul.
3. Normes usuelles et vérifier que ce sont des normes : attention, nous n'avons pas fait de révisions d'espaces euclidiens, donc on a admis que les normes 2 étaient des normes.
4. Unicité de la limite.
5. Une boule est convexe, bornée, symétrique par rapport à l'origine.
6. Bolzano-Weiestrass dans $\mathbb{K}^n$ en admettant celui dans $\mathbb{K}$ (et en admettant, bien sûr, que dans $\mathbb{K}^n$, les normes sont toutes équivalentes et que la convergence équivaut à la convergence coordonnée par coordonnée.)
7. Si N_1 et N_2 sont des normes, équivalence de
   (a) $\exists \alpha > 0, \forall x \in E, N_1(x) \leqslant \alpha N_2(x)$,
   (b) toute suite bornée pour N_2 l'est pour N_1,
   (c) toute suite convergente pour N_2 l'est pour N_1 (et converge vers la même limite)
8. Sur $\mathscr{C}([a,b],\mathbb{K})$, $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_\infty$ ne sont pas équivalentes.

Programme en détail (extraits du programme officiel)

Révisions et compléments d'algèbre linéaire

— espaces vectoriels, sev, familles de vecteurs

— applications linéaires, noyau, image

— dimension finie

— matrices

— déterminants

— compléments

— un soupçon d'algèbre générale (algèbres et idéaux), définition de l'idéal annulateur, définition de $\mathbb{K}[u]$. Essentiellement des définitions, quelques petits exemples.

Topologie des espaces vectoriels normés : normes

Dans toute cette section, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Normes et espaces vectoriels normés	
Norme sur un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Structure d'espace vectoriel normé.	Vecteurs unitaires.
Distance associée à une norme.	Inégalité triangulaire.
Boules fermées, boules ouvertes, sphères. Convexité des boules.	On introduit à cette occasion la notion de partie convexe d'un espace vectoriel réel.
Parties, suites, fonctions bornées.	

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
Norme associée à un produit scalaire sur un espace préhilbertien réel.	
Normes $\|\ \|_1$, $\|\ \|_2$, $\|\ \|_\infty$ sur $\mathbb{K}^n$.	
Norme de la convergence uniforme sur l'espace des fonctions bornées à valeurs dans $\mathbb{K}$.	Notation $\|\ \|_\infty$. Pour les applications pratiques, on peut utiliser sans justification l'égalité $\sup(kA) = k\sup(A)$ pour A partie non vide de $\mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{R}^+$.
Normes de la convergence en moyenne et de la convergence en moyenne quadratique sur l'espace des fonctions continues sur un segment à valeurs réelles ou complexes.	Notations $\|\ \|_1$ et $\|\ \|_2$.
Produit fini d'espaces vectoriels normés.	
b) Suites d'éléments d'un espace vectoriel normé	
Suite convergente, divergente. Unicité de la limite. Caractère borné d'une suite convergente. Opérations algébriques sur les suites convergentes. Convergence d'une suite à valeurs dans un produit fini d'espaces vectoriels normés.	
Suites extraites, valeurs d'adhérence.	Une suite ayant au moins deux valeurs d'adhérence diverge.
c) Comparaison des normes	
Normes équivalentes. Invariance du caractère borné, de la convergence d'une suite.	Utilisation de suites pour établir que deux normes ne sont pas équivalentes.