MP – Programme de colles
Semaine 05 – du 12 au 16 octobre 2026

Programme en bref

— cours sur les normes et le début des probabilités (jusqu'aux lois usuelles)

— exercices sur les normes dans les espaces vectoriels. La comparaison de normes est au cœur de la colle. Il est tout à fait possible, ensuite, de revenir sur la notion de valeur d'adhérence (peu manipulée pour le moment, mais définie en cours), de faire faire du Bolano-Weiestrass dans $\mathbb{K}$ ou dans $\mathbb{K}^n$, etc. Pas d'exercices de probas, ou éventuellement pour les colles de jeudi/vendredi, en dernière partie de colle.

Exemples de questions de cours ou d'exercices très classiques

1. Une boule est convexe, bornée, symétrique par rapport à l'origine.
2. Bolzano-Weiestrass dans $\mathbb{K}^n$ en admettant celui dans $\mathbb{K}$ (et en admettant, bien sûr, que dans $\mathbb{K}^n$, les normes sont toutes équivalentes et que la convergence équivaut à la convergence coordonnée par coordonnée.)
3. Si N_1 et N_2 sont des normes, équivalence de
   (a) $\exists \alpha > 0, \forall x \in E, N_1(x) \leqslant \alpha N_2(x)$,
   (b) toute suite bornée pour N_2 l'est pour N_1,
   (c) toute suite convergente pour N_2 l'est pour N_1 (et converge vers la même limite)
4. Sur $\mathscr{C}([a,b],\mathbb{K})$, $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_\infty$ ne sont pas équivalentes.
5. Continuité croissante/décroissante.
6. Définition de la loi d'une variable aléatoire + elle définit une probabilité sur $X(\Omega)$.
7. Définition des lois usuelles. Calcul et interprétation de $\mathbb{P}(X > k)$ lorsque $X \sim \mathscr{G}(p)$
8. (exo classique) Si $X_n \sim \mathscr{B}(n, p_n)$ et $np_n \to \lambda$, alors pour tout k dans $\mathbb{N}$, $P(X_n = k) \to \mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$.

Programme en détail (extraits du programme officiel)

Topologie des espaces vectoriels normés : normes

Dans toute cette section, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Normes et espaces vectoriels normés	
Norme sur un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Structure d'espace vectoriel normé.	Vecteurs unitaires.
Distance associée à une norme.	Inégalité triangulaire.
Boules fermées, boules ouvertes, sphères. Convexité des boules.	On introduit à cette occasion la notion de partie convexe d'un espace vectoriel réel.
Parties, suites, fonctions bornées.	
Norme associée à un produit scalaire sur un espace préhilbertien réel.	
Normes $\|\ \|_1$, $\|\ \|_2$, $\|\ \|_\infty$ sur $\mathbb{K}^n$.	
Norme de la convergence uniforme sur l'espace des fonctions bornées à valeurs dans $\mathbb{K}$.	Notation $\|\ \|_\infty$. Pour les applications pratiques, on peut utiliser sans justification l'égalité $\sup(kA) = k\sup(A)$ pour A partie non vide de $\mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{R}^+$.
Normes de la convergence en moyenne et de la convergence en moyenne quadratique sur l'espace des fonctions continues sur un segment à valeurs réelles ou complexes.	Notations $\|\ \|_1$ et $\|\ \|_2$.
Produit fini d'espaces vectoriels normés.	

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
b) Suites d'éléments d'un espace vectoriel normé	
Suite convergente, divergente. Unicité de la limite. Caractère borné d'une suite convergente. Opérations algébriques sur les suites convergentes. Convergence d'une suite à valeurs dans un produit fini d'espaces vectoriels normés.	
Suites extraites, valeurs d'adhérence.	Une suite ayant au moins deux valeurs d'adhérence diverge.
c) Comparaison des normes	
Normes équivalentes. Invariance du caractère borné, de la convergence d'une suite.	Utilisation de suites pour établir que deux normes ne sont pas équivalentes.

Variables aléatoires discrètes

Cette section généralise aux variables aléatoires discrètes l'étude menée en première année des variables aléatoires à valeurs dans un ensemble fini. Cette généralisation nécessite d'introduire des notions générales de théorie des probabilités, lesquelles font l'objet d'un exposé a minima. En particulier :

- *la notion de tribu, introduite pour donner un cadre rigoureux, n'appelle aucun développement théorique ;*
- *la construction d'espaces probabilisés n'est pas un objectif du programme ;*
- *les diverses notions de convergence (presque sûre, en probabilité, en loi) sont hors programme.*

La théorie des familles sommables permet une extension très naturelle des notions et résultats vus en première année. Cette extension est effectuée rapidement, de manière à libérer du temps pour les exemples et exercices. L'objectif de l'enseignement est en effet de renforcer la compréhension de l'aléatoire, en lien avec d'autres parties du programme. On pourra ainsi faire travailler les étudiants sur divers objets aléatoires (permutations, graphes, matrices...) les inégalités de concentration et des exemples de processus à temps discret (marches aléatoires, chaînes de Markov...).

La notion de variable à densité est hors programme.

La notion d'espérance conditionnelle est hors programme.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Ensembles dénombrables	
Un ensemble est dit dénombrable s'il est en bijection avec $\mathbb{N}$.	Les parties infinies de $\mathbb{N}$ sont dénombrables.
Un ensemble est fini ou dénombrable si et seulement s'il est en bijection avec une partie de $\mathbb{N}$.	Un tel ensemble est dit au plus dénombrable.
Un produit cartésien fini d'ensembles dénombrables est dénombrable. Une réunion finie ou dénombrable d'ensembles finis ou dénombrables est finie ou dénombrable.	Les démonstrations ne sont pas exigibles. Les ensembles $\mathbb{N}^p$ ($p \in \mathbb{N}^*$), $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Q}$ sont dénombrables. Le support d'une famille sommable de nombres complexes est dénombrable.
L'ensemble $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable.	La démonstration n'est pas exigible.
b) Espaces probabilisés	
Tribu sur un ensemble Ω. Espace probabilisable $(\Omega, \mathscr{A})$.	La manipulation de tribus n'est pas un objectif du programme.
Événements.	Généralisation du vocabulaire relatif aux événements introduit en première année.
Probabilité sur un espace probabilisable, σ-additivité. Espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$.	

Contenus	Capacités & Commentaires
Continuité croissante, continuité décroissante.	Application : pour une suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'événements (non nécessairement monotone), limites quand n tend vers l'infini de $P\Big(\bigcup_{k=0}^{n} A_k\Big)$ et $P\Big(\bigcap_{k=0}^{n} A_k\Big)$.
Propriété de sous-additivité de P pour une réunion dénombrable d'événements.	
Événements négligeables, événements presque sûrs. Une réunion (resp. intersection) finie ou dénombrable d'événements négligeables (resp. presque sûrs) est un événement négligeable (resp. presque sûr).	Systèmes quasi-complets d'événements. Tout développement supplémentaire sur ces notions est hors programme.

d) Espaces probabilisés discrets

Si Ω est un ensemble, une distribution de probabilités discrètes sur Ω est une famille d'éléments de $\mathbb{R}^+$ indexée par Ω et de somme 1.	Support d'une distribution de probabilités discrète ; le support est au plus dénombrable.
Probabilité définie sur $\mathscr{A} = \mathscr{P}(\Omega)$ associée à une distribution de probabilités discrètes sur Ω.	Si Ω est au plus dénombrable, on obtient ainsi toutes les probabilités sur $\mathscr{P}(\Omega)$.

e) Variables aléatoires discrètes

Une variable aléatoire discrète X définie sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ et à valeurs dans E est une application définie sur Ω, à valeurs dans l'ensemble E, telle que $X(\Omega)$ soit au plus dénombrable et que, pour tout $x \in X(\Omega)$, l'ensemble $X^{-1}(\{x\})$ appartienne à $\mathscr{A}$.	Notations $(X = x)$, $(X \in A)$, $\{X = x\}$, $\{X \in A\}$. Lorsque $E = \mathbb{R}$, la variable aléatoire X est dite réelle. Notations $(X \leqslant x), (X \geqslant x), (X < x), (X > x)$ (et analogues avec accolades) pour une variable aléatoire réelle X.
Loi P_X d'une variable aléatoire discrète X.	La loi de X peut au besoin être définie sur un ensemble contenant $X(\Omega)$.

Dans ce qui suit, toutes les variables aléatoires sont supposées discrètes.

La probabilité P_X est déterminée par la distribution de probabilités discrète $(P(X = x))_{x\in X(\Omega)}$.	
Notation $X \sim Y$.	La notation $X \sim Y$ ne suppose pas que X et Y sont définies sur le même espace probabilisé.
Variable aléatoire $f(X)$. Si $X \sim Y$ alors $f(X) \sim f(Y)$.	

g) Lois usuelles

Pour p dans $]0,1[$, loi géométrique de paramètre p. Variable géométrique de paramètre p.	Notations $\mathscr{G}(p)$, $X \sim \mathscr{G}(p)$. Interprétation comme rang du premier succès dans le jeu de pile ou face infini.
Pour λ dans $\mathbb{R}_+^*$, loi de Poisson de paramètre λ. Variable de Poisson de paramètre λ.	Notations $\mathscr{P}(\lambda)$, $X \sim \mathscr{P}(\lambda)$. Interprétation en termes d'événements rares.