Principe Fondamental de la Dynamique : Cas des mouvements simples

1-principe général

1.1- Enoncé général

Un repère R_1 est galiléen lorsque :

- Ce repère est immobile dans un autre repère galiléen R_0 .
- Ce repère est en translation rectiligne uniforme dans un autre repère galiléen R_0 .

Pour tous les exercices de mécanique que nous traiterons, tous les repères fixes par rapport à la terre seront considérés comme galiléens. (Ce principe n'est pas toujours valable)

1.2- Traduction mathématique du PFD

Si les actions extérieures appliquées sur le système S sont modélisées par un torseur $\{\mathcal{T}(\text{Ext/S})\}$, et les quantités d'accélération sont modélisées par le torseur dynamique $\{\mathcal{D}(\text{S/Rg})\}$ on a alors :

Pour appliquer le PFD il faut donc exprimer le torseur dynamique et les torseurs des actions mécaniques extérieures

1.3- Remarque sur le PFS

2- Calcul du torseur dynamique

2.1- Quantité d'accélération d'une masse ponctuelle dm

Si on a une masse ponctuelle dm concentrée en un point M, alors la quantité d'accélération de cette masse dans le repère galiléen R_g est le produit de cette masse et du vecteur accélération du point M par rapport au repère galiléen : Quantité d'accélération de la masse dm :

2.2- Quantité d'accélération d'un solide S_i

Les quantités d'accélération d'un solide S_i se modélisent par un torseur constitué d'une résultante

dynamique et d'un moment dynamique :

Avec : La résultante dynamique :

et : Le moment dynamique en A :

Pour un système S est constitué de n solides :

Si : Alors :

3- Résultante dynamique

Soit un solide S_i de centre d'inertie G en mouvement quelconque par rapport au repère galiléen R_g.

A tout instant et pour tout point $M \in S_i$ on a : $\overrightarrow{V_{M\in Si/Rg}} = \overrightarrow{V_{G\in Si/Rg}} + \overrightarrow{MG} \wedge \overrightarrow{\Omega(S_i/R_g)}$ **(1)**

Sachant que : $\overrightarrow{a_{M\in Si/Rg}} = \left(\dfrac{d\overrightarrow{V_{M\in Si/Rg}}}{dt}\right)_{R_g}$ et que : $\overrightarrow{a_{G\in Si/Rg}} = \left(\dfrac{d\overrightarrow{V_{G\in Si/Rg}}}{dt}\right)_{R_g}$

On a en dérivant **(1)** dans R_g : $\overrightarrow{a_{M\in Si/Rg}} = \overrightarrow{a_{G\in Si/Rg}} + \left(\dfrac{d\,\overrightarrow{MG}}{dt}\right)_{R_g} \wedge \overrightarrow{\Omega(S_i/R_g)} + \overrightarrow{MG} \wedge \left(\dfrac{d\,\overrightarrow{\Omega(S_i/R_g)}}{dt}\right)_{R_g}$

$$\overrightarrow{a_{M\in Si/Rg}} = \overrightarrow{a_{G\in Si/Rg}} + \left[\left(\dfrac{d\,\overrightarrow{MG}}{dt}\right)_{R_i} + \overrightarrow{\Omega(S_i/R_g)} \wedge \overrightarrow{MG}\right] \wedge \overrightarrow{\Omega(S_i/R_g)} + \overrightarrow{MG} \wedge \left(\dfrac{d\,\overrightarrow{\Omega(S_i/R_g)}}{dt}\right)_{R_g}$$

Les points M et G étant fixes au cours du temps sur le solide S_i on a : $\left(\dfrac{d\,\overrightarrow{MG}}{dt}\right)_{R_i} = \vec{0}$

$$\overrightarrow{a_{M\in Si/Rg}} = \overrightarrow{a_{G\in Si/Rg}} + \left(\overrightarrow{\Omega(S_i/R_g)} \wedge \overrightarrow{MG}\right) \wedge \overrightarrow{\Omega(S_i/R_g)} + \overrightarrow{MG} \wedge \left(\dfrac{d\,\overrightarrow{\Omega(S_i/R_g)}}{dt}\right)_{R_g}$$

Or par définition la résultante dynamique est donnée par : $\overrightarrow{R_D(S_i/R_g)} = \iiint_{S_i} \overrightarrow{a_{M\in Si/Rg}}.dm$ donc :

$$\overrightarrow{R_D(S_i/R_g)} = \iiint_{S_i} \overrightarrow{a_{G\in Si/Rg}}.dm + \iiint_{S_i} \left[\left(\overrightarrow{\Omega(S_i/R_g)} \wedge \overrightarrow{MG}\right) \wedge \overrightarrow{\Omega(S_i/R_g)}\right].dm + \iiint_{S_i} \left[\overrightarrow{MG} \wedge \left(\dfrac{d\,\overrightarrow{\Omega(S_i/R_g)}}{dt}\right)_{R_g}\right].dm$$

$$\overrightarrow{R_D(S_i/R_g)} = \left(\iiint_{S_i} dm\right).\overrightarrow{a_{G\in Si/Rg}} + \left[\overrightarrow{\Omega(S_i/R_g)} \wedge \left(\iiint_{S_i} \overrightarrow{MG}.dm\right)\right] \wedge \overrightarrow{\Omega(S_i/R_g)} + \left(\iiint_{S_i} \overrightarrow{MG}.dm\right) \wedge \left(\dfrac{d\,\overrightarrow{\Omega(S_i/R_g)}}{dt}\right)_{R_g}$$

Sachant que par définition de la masse m du solide S_i : $\iiint_{S_i} dm = m$ et que par définition du centre d'inertie G du solide S_i : $\iiint_{S_i} \overrightarrow{MG}.dm = \vec{0}$ On obtient, quelque soit le mouvement du solide S_1 par rapport au solide S_0, la résultante dynamique du solide S_1 dans le repère lié au solide S_0 :

4- Cas du mouvement de translation

4.1- Moment dynamique au centre de gravité

Soit le moment dynamique en G centre d'inertie du solide S_i : $\overrightarrow{\delta_{G(Si/Rg)}} = \iiint_{S_i} \overrightarrow{GM} \wedge \overrightarrow{a_{M\in Si/Rg}}.dm$

Or en translation : $\overrightarrow{a_{M\in Si/Rg}} = \overrightarrow{a_{G\in Si/Rg}}$ donc : $\overrightarrow{\delta_{G(Si/Rg)}} = \iiint_{S_i} \overrightarrow{GM} \wedge \overrightarrow{a_{G\in Si/Rg}}.dm = \left(\iiint_{S_i} \overrightarrow{GM}.dm\right) \wedge \overrightarrow{a_{G\in Si/Rg}}$

Or par définition du centre d'inertie : $\iiint_{S_i} \overrightarrow{MG}.dm = \vec{0}$ Donc :

4.2- Expression du torseur dynamique

Soit S_i un solide de masse m et de centre d'inertie G, en mouvement de translation quelconque par rapport au repère galiléen R_g. Alors le torseur dynamique de ce solide par rapport au repère R_g est :

4.3- Théorème de la résultante dynamique

Si un solide S_i de masse m et de centre d'inertie G est en mouvement de translation quelconque par rapport au repère galiléen R_g. Alors :

Où : $\Sigma \overrightarrow{F_{Ext \to S}}$ est la somme des forces extérieures s'appliquant sur le système S

Et : $\overrightarrow{\boldsymbol{a}_{G \in S/Rg}}$ est le vecteur accélération du centre de gravité G

4.4- Théorème du moment dynamique

Si un solide S_i de masse m et de centre d'inertie G est en **mouvement de translation** quelconque par rapport au repère galiléen Rg. Alors :

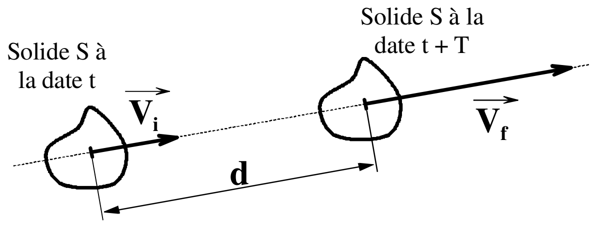
ou :

Où : $\Sigma \overrightarrow{\mathcal{M}_G(Ext \to S_i)}$ et $\Sigma \overrightarrow{\mathcal{M}_A(Ext \to S_i)}$ sont respectivement la somme des moments en G et en A des actions extérieures s'appliquant sur le solide S_i.

4.5- Cinématique du mouvement de translation rectiligne

Soit un solide S en mouvement de translation rectiligne pour lequel on pose :

- ☞ V_f et V_i les modules des vecteurs vitesses finales et initiales (Vecteurs de même sens). Et v(t) la vitesse du solide S à un instant t.
- ☞ d la distance parcourue sur le mouvement
- ☞ T la durée de ce mouvement



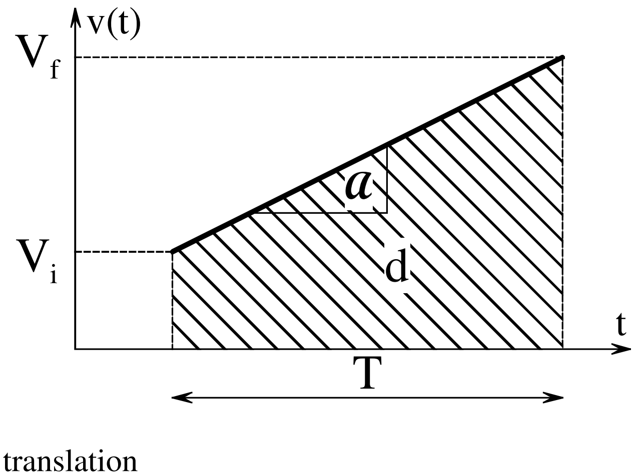
- ☞ $\boldsymbol{a}$ la valeur algébrique de l'accélération : $\left\|\overrightarrow{\boldsymbol{a}_{G \in S/Rg}}\right\| = |\boldsymbol{a}|$

En considérant le diagramme des vitesses du mouvement (courbe représentative de v(t)) on a :

☞

☞

Par exemple, pour un mouvement **uniformément varié** ($\boldsymbol{a}$ est constante) on a :



Et : $\overrightarrow{\boldsymbol{a}_{G \in S/Rg}}$ est parallèle à la direction de translation

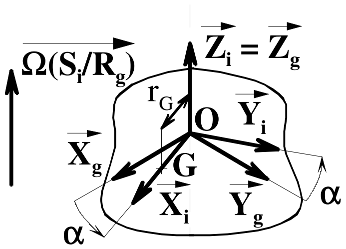
Enfin : Si $V_f > V_i$ alors $\overrightarrow{\boldsymbol{a}_{G \in S/Rg}}$ et $\overrightarrow{V_{G \in S/Rg}}$ sont de même sens

Si $V_f < V_i$ alors $\overrightarrow{\boldsymbol{a}_{G \in S/Rg}}$ et $\overrightarrow{V_{G \in S/Rg}}$ sont de sens opposés

5- Cas des mouvements de rotation autour d'un axe fixe

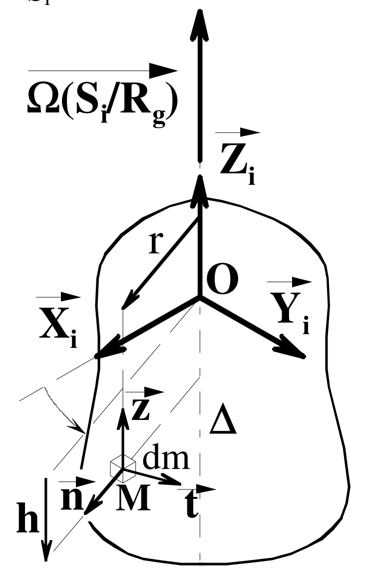
5.1– Moment dynamique par rapport à l'axe de rotation

Soit le solide S_i en mouvement de rotation autour d'un axe fixe dans un repère galiléen R_g. On pose :



- ☞ $R_g = (\overrightarrow{X_g}, \overrightarrow{Y_g}, \overrightarrow{Z_g})$ Un repère galiléen fixe lié au solide fixe S_0.
- ☞ $R_i = (\overrightarrow{X_i}, \overrightarrow{Y_i}, \overrightarrow{Z_i})$ Un repère fixe par rapport au solide S_1
- ☞ α le paramètre angulaire de la position de S_1 dans R_0 : $\alpha = (\widehat{\overrightarrow{X_g}, \overrightarrow{X_i}})$
- ☞ $\overrightarrow{\Omega(S_i/R_g)}$ le vecteur rotation du solide S_i par rapport au repère R_g : $\overrightarrow{\Omega(S_i/R_g)} = \dot{\alpha} \,.\, \overrightarrow{Z_g} = \omega \,.\, \overrightarrow{Z_g}$
- ☞ G le centre de gravité du solide S_i situé à une distance r_G de l'axe de rotation $\Delta = (O, \overrightarrow{Z_g}) = (O, \overrightarrow{Z_i})$

On sait que le moment dynamique en O est défini par : $\overrightarrow{\delta_O(S_i/R_g)} = \iiint_{S_i} \overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{a_{M\in Si/Rg}} \,.dm$



Associons à chaque point M du solide S_i un repère local $(\overrightarrow{n}, \overrightarrow{t}, \overrightarrow{z})$ où :
- ☞ $\overrightarrow{z}$ est parallèle à l'axe de rotation : $\overrightarrow{z} = \overrightarrow{Z_0}$
- ☞ $\overrightarrow{n}$ est perpendiculaire à l'axe de rotation (Il est défini par un rayon passant par M)
- ☞ $\overrightarrow{t}$ est orthogonal à l'axe de rotation (Il est tangent au cercle d'axe Δ passant par M)

Etant donné le mouvement de rotation autour de l'axe Δ à la vitesse angulaire $\omega = \dot{\alpha}$ du solide S_i par rapport au Repère R_g, l'accélération du point M se compose de deux accélérations
- ☞ une accélération centripète : $\mathbf{-\, r \,.\, \omega^2 \,.\, \overrightarrow{n}}$
- ☞ une accélération tangentielle : $\mathbf{r \,.\, \dot{\omega} \,.\, \overrightarrow{t}}$

On en déduit le produit vectoriel :

$$\overrightarrow{\mathbf{OM}} \wedge \overrightarrow{a_{M\in Si/Rg}} = (\mathbf{r} \,.\, \overrightarrow{\mathbf{n}} + \mathbf{h} \,.\, \overrightarrow{\mathbf{z}}) \wedge (-\,\mathbf{r} \,.\, \omega^2 \,.\, \overrightarrow{\mathbf{n}} + \mathbf{r} \,.\, \dot{\omega} \,.\, \overrightarrow{\mathbf{t}})$$

Sachant que le moment dynamique en O est défini par : $\overrightarrow{\delta_O(S_i/R_g)} = \iiint_{S_i} \overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{a_{M\in Si/Rg}} \,.dm$

$$\overrightarrow{\delta_O(S_i/R_g)} = \iiint_{S_i} (r^2 \,.\, \dot{\omega} \,.\, \overrightarrow{z} - r \,.\, h \,.\, \omega^2 \,.\, \overrightarrow{t} - r \,.\, h \,.\, \dot{\omega} \,.\, \overrightarrow{n}).\, dm$$

$$\overrightarrow{\delta_O(S_i/R_g)} = \iiint_{S_i} r^2.dm \; \dot{\omega} \,.\, \overrightarrow{z} + \iiint_{S_i} (-\, r \,.\, h \,.\, \omega^2 \,.\, \overrightarrow{t} - r \,.\, h \,.\, \dot{\omega} \,.\, \overrightarrow{n}) \,.\, dm$$

Les vecteurs $\overrightarrow{n}$ et $\overrightarrow{t}$ varient à l'intérieur de l'intégrale, mais restent toujours orthogonaux à $\overrightarrow{Z}$.

Donc le vecteur : $\iiint_{S_i} (-\, r \,.\, h \,.\, \omega^2 \,.\, \overrightarrow{t} - r \,.\, h \,.\, \dot{\omega} \,.\, \overrightarrow{n}) \,.\, dm$ est orthogonal à $\overrightarrow{Z}$.

Donc : $\left[\iiint_{S_i} (-\, r \,.\, h \,.\, \omega^2 \,.\, \overrightarrow{t} - r \,.\, h \,.\, \dot{\omega} \,.\, \overrightarrow{n}) \,.\, dm\right] .\, \overrightarrow{Z} = \overrightarrow{0}$

Où : ☞ $I_\Delta(S_i)$ est le moment d'inertie du solide Si par rapport à l'axe $\Delta = (O, \overrightarrow{Z})$

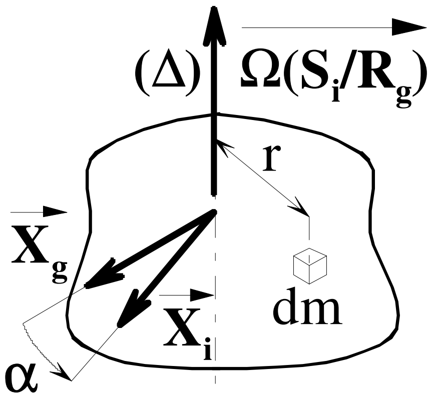
☞ $I_\Delta(S_i)$ est défini par l'intégrale sur le solide S_i :

☞ L'unité S.I. de ce moment d'inertie est le :

5.2- Théorème du moment dynamique par rapport à un axe de rotation fixe

Soit le solide S_i en rotation d'axe (Δ) (fixe dans R_g) à la vitesse angulaire ω par rapport au repère R_g.

On pose :



☞ α : la position angulaire du solide S_i par rapport au repère galiléen R_g : $\omega = \dot{\alpha} = \dfrac{d\alpha}{dt}$

☞ $I_\Delta(S_i)$: Le moment d'inertie par rapport à l'axe (Δ) du solide S_i : $I_\Delta(S_i) = \iiint_{S_i} r^2.dm$

☞ $\Sigma\ \mathcal{M}_\Delta(Ext\rightarrow S_i)$: la somme des moments par rapport à l'axe (Δ) des actions extérieures.

On a alors :

Cas ou l'axe de rotation est l'axe (O, $\overrightarrow{Z}$) :

Dans ce cas la somme des moments par rapport à l'axe de rotation est la projection sur l'axe $\overrightarrow{Z}$ de la somme des moments en O des actions extérieures. On a donc :

5.3- Cinématique du mouvement de rotation autour d'un axe fixe

Soit un solide S en mouvement de rotation autour d'un axe fixe pour lequel on pose :

☞ ω_f et ω_i les vitesses angulaires finales et initiales du mouvement. Et $\omega(t)$ la vitesse angulaire du solide S à un instant t.

☞ $\dot{\omega}(t)$ l'accélération angulaire du mouvement

☞ T la durée de ce mouvement

☞ $\Delta\alpha$ l'angle parcouru sur la durée T du mouvement

En considérant le diagramme des vitesses du mouvement (courbe représentative de $\omega(t)$) on a :

☞

☞

Par exemple, pour un mouvement **uniformément varié** ($\dot{\omega}$ est constante) on a :