TD2 : Commande de soupape à linguet : Corrigé

1- Détermination de l'expression du couple moteur

On néglige l'inertie du galet 5 donc l'énergie cinétique du système Σ_0 est :

$$E_C(\Sigma_0/0) = E_C(2/0) + E_C(6/0) + E_C(7/0)$$

Les solides 2 et 6 étant en rotation autour d'un axe fixe et 7 en translation par rapport à 0, on a :

$$E_C(\Sigma_0/0) = \frac{1}{2}.J_{A2}.\omega^2 + \frac{1}{2}.J_{B6}.\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}.m_7.\dot{y}^2 \qquad \text{Avec :} \quad \dot{\theta} = -\frac{\dot{y}}{\ell} \qquad \text{On en déduit :}$$

$$\mathbf{E_C(\Sigma_0/0) = \frac{1}{2}.J_{A2}.\omega^2 + \frac{1}{2}\left(m_7 + \frac{J_{B6}}{\ell^2}\right).\dot{y}^2}$$

Le système Σ_0 est constitué que de solides en liaisons parfaites entre eux et avec le bâti.

☞ Donc la somme des puissances des actions intérieures est nulle : $\Sigma\ P(Int \to \Sigma_0/0) = 0$

☞ Et la somme des actions de liaisons avec le bâti est nulle : $\Sigma\ P(0 \to \Sigma_0/0) = 0$

Reste donc les puissances du couple moteur $\overrightarrow{C_m}$ et de l'action du ressort :

☞ $P(\overrightarrow{Cm} \to 2/0) = \overrightarrow{C_m}.\overrightarrow{\Omega_{2/0}} = C_m.\omega$ et :

☞ $P(8 \to 7/0) = \overrightarrow{F_{8\to7}}.\overrightarrow{V_{D\in 7/0}} = (F_0 - k.y).\overrightarrow{y_0}.\dot{y}.\overrightarrow{y_0} = (F_0 - k.y).\dot{y}$

On a donc : $$\mathbf{\Sigma\ P(Int \to \Sigma_0/0) + \Sigma\ P(Ext \to \Sigma_0/0) = C_m.\omega + (F_0 - k.y).\dot{y}}$$

Ayant $\omega = c^{te}$ l'application du TEC $\left(\Sigma\ P(Int \to \Sigma_0/0) + \Sigma\ P(Ext \to \Sigma_0/0) = \frac{d\ E_C(\Sigma_0/0)}{dt}\right)$ donne donc :

$$C_m.\omega + (F_0 - k.y).\dot{y} = \left(m_7 + \frac{J_{B6}}{\ell^2}\right).\dot{y}.\ddot{y} \qquad \text{On en déduit :}$$

$$\boxed{\mathbf{C_m = \frac{\dot{y}}{\omega}.\left[-F_0 + k.y + \left(m_7 + \frac{J_{B6}}{\ell^2}\right).\ddot{y}\right]}}$$

1.2- Détermination du couple moteur maximal

Ce couple est maximal pour $\omega = \omega_{max}$ et à la fin de la première phase, à la date t_1^-. Date t_1^- à laquelle on a : $y = -\frac{\Delta y}{4}$ $\quad \dot{y} = -\frac{6.\Delta y.\omega}{\pi}$ et : $\ddot{y} = -\frac{72.\Delta y.\omega^2}{\pi^2}$ On en déduit :

$$\boxed{\mathbf{C_m = \frac{6.\Delta y}{\pi}.\left[F_0 + \frac{k.\Delta y}{4} + \frac{72.\Delta y.\omega^2}{\pi^2}.\left(m_7 + \frac{J_{B6}}{\ell^2}\right)\right]}}$$

2.1- Détermination de l'effort de contact en D

La soupape 7 est en mouvement de translation par rapport au bâti 0, d'où son énergie cinétique :

$$E_C(7/0) = \frac{1}{2}.m_7.\dot{y}^2$$

Elle est en liaison parfaite avec le bâti donc $P(0 \to 7/0) = 0$

Le ressort 8 exerce une action modélisée par une force de résultante $\overrightarrow{F_{8\to7}} = (F_0 - k.y).\overrightarrow{y_0}$ qui fournit donc une puissance : $P(8 \to 7/0) = \overrightarrow{F_{8\to7}}.\overrightarrow{V_{D\in 7/0}} = (F_0 - k.y).\overrightarrow{y_0}.\dot{y}.\overrightarrow{y_0} = (F_0 - k.y).\dot{y}$

Le linguet 6 exerce une action modélisée par une force de résultante $\overrightarrow{F_{6\to7}} = -F_D.\overrightarrow{y_0}$ qui fournit donc une puissance : $P(6 \to 7/0) = \overrightarrow{F_{6\to7}}.\overrightarrow{V_{D\in 7/0}} = -F_D.\overrightarrow{y_0}.\dot{y}.\overrightarrow{y_0} = -F_D.\dot{y}$

Cette soupape étant un solide : $\Sigma\ P(Int \to 7/0) = 0$

L'application du TEC $\left(\Sigma\ P(Int \to 7/0) + \Sigma\ P(Ext \to 7/0) = \frac{d\ E_C(7/0)}{dt}\right)$ à cette soupape donne donc :

$$m_7.\dot{y}.\ddot{y} = (F_0 - k.y).\dot{y} - F_D.\dot{y} \qquad \text{On en déduit :} \qquad \boxed{\mathbf{F_D = F_0 - k.y - m_7.\ddot{y}}}$$

2.2- Détermination de la vitesse du point H appartenant au galet 5 par rapport à 0

On a un roulement sans glissement au point H entre 2 et 5. Donc : $\overrightarrow{V_{H\in 5/2}} = \vec{0}$

Or de la loi de composition des vitesses on a : $\overrightarrow{V_{H\in 5/0}} = \overrightarrow{V_{H\in 5/2}} + \overrightarrow{V_{H\in 2/0}}$ D'où : $\overrightarrow{V_{H\in 5/0}} = \overrightarrow{V_{H\in 2/0}}$

D'autre part le mouvement de 2 par rapport à 0 est une rotation d'axe $(A, \overrightarrow{x_0})$ donc $\overrightarrow{V_{A\in 2/0}} = \vec{0}$.

Donc : $\overrightarrow{V_{H\in 5/0}} = \overrightarrow{V_{H\in 2/0}} = \vec{0} + \overrightarrow{HA} \wedge \overrightarrow{\Omega_{2/0}} = r_H.\vec{v} \wedge \omega.\overrightarrow{x_0}$ Soit : $\boldsymbol{\overrightarrow{V_{H\in 5/0}} = r_H.\omega.\vec{u}}$

2.3- Détermination de l'effort de contact en H

On néglige l'inertie du galet 5 donc l'énergie cinétique du système $\Sigma_0 = \{5,6,7\}$ est :

$$E_C(\Sigma_0/0) = E_C(6/0) + E_C(7/0)$$

Le solide 6 étant en rotation autour d'un axe fixe et 7 en translation par rapport à 0, on a :

$$E_C(\Sigma_0/0) = \frac{1}{2}.J_{B6}.\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}.m_7.\dot{y}^2 \quad \text{Avec : } \dot{\theta} = -\frac{\dot{y}}{\ell} \quad \text{On en déduit : } E_C(\Sigma_0/0) = \frac{1}{2}\left(m_7 + \frac{J_{B6}}{\ell^2}\right).\dot{y}^2$$

Le système Σ_1 est constitué que de solides en liaisons parfaites entre eux et avec le bâti.

- ☞ Donc la somme des puissances des actions intérieures est nulle : $\Sigma\, P(Int\rightarrow\Sigma_0/0) = 0$
- ☞ Et la somme des actions de liaisons avec le bâti est nulle : $\Sigma\, P(0\rightarrow\Sigma_0/0) = 0$

Reste donc les puissances de l'action du ressort 8 sur 7 et de celle de la came 2 sur 5 :

- ☞ $P(8\rightarrow 7/0) = \overrightarrow{F_{8\rightarrow 7}}.\overrightarrow{V_{D\in 7/0}} = (F_0 - k.y).\overrightarrow{y_0}.\dot{y}.\overrightarrow{y_0} = (F_0 - k.y).\dot{y}$
- ☞ L'action de 2 sur 5 est une force appliquée en H et de résultante : $\overrightarrow{F_{2\rightarrow 5}} = -F_H.\vec{n}$ car on a une liaison ponctuelle de normale $(H, \vec{n})$. D'où la puissance fournie par cette action : $P(2\rightarrow 5/0) = \overrightarrow{F_{2\rightarrow 5}}.\overrightarrow{V_{H\in 5/0}} = -F_H.\vec{n}.r_H.\omega.\vec{u} = -F_H.r_H.\omega.\vec{u}.\vec{n}$

L'application du TEC $\left(\Sigma\, P(Int\rightarrow\Sigma_1/0) + \Sigma\, P(Ext\rightarrow\Sigma_1/0) = \frac{d\,E_C(\Sigma_1/0)}{dt}\right)$ donne donc :

$$(F_0 - k.y).\dot{y} - F_H.r_H.\omega.\vec{u}.\vec{n} = \left(m_7 + \frac{J_{B6}}{\ell^2}\right).\dot{y}.\ddot{y} \qquad \text{On en déduit :}$$

$$\boldsymbol{F_H = \frac{\dot{y}}{r_H.\omega.\vec{u}.\vec{n}}.\left[F_0 - k.y - \left(m_7 + \frac{J_{B6}}{\ell^2}\right).\ddot{y}\right]}$$

2.4- Détermination des efforts de contact en D et H à la date t_1^+

A la date t_1^+ on a : $y = -\frac{\Delta y}{4}$ $\quad \dot{y} = -\frac{6.\Delta y.\omega}{\pi}$ $\quad$ et : $\ddot{y} = \frac{24.\Delta y.\omega^2}{\pi^2}$ $\quad$ On en déduit :

$$\boldsymbol{F_D(t_1^+) = F_0 + \frac{k.\Delta y}{4} - \frac{24.\Delta y.\omega^2}{\pi^2}.m_7}$$

$$\boldsymbol{F_H(t_1^+) = -\frac{6}{\pi.r_H.\vec{u}.\vec{n}}\left[F_0 + \frac{k.\Delta y}{4} - \frac{24.\Delta y.\omega^2}{\pi^2}.\left(m_7 + \frac{J_{B6}}{\ell^2}\right)\right]}$$

2.5- Détermination de la précontrainte du ressort : F_0

Pour qu'il n'y ait pas de phénomène d'affolement de soupape (Que les contacts en D et H soient maintenus il faut que $F_D(t_1^+) \geq 0$ et $F_H(t_1^+) \geq 0$. Or d'après les expressions précédentes :

- ☞ $F_D(t_1^+) \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad F_0 \geq \frac{24.\Delta y.\omega^2}{\pi^2}.m_7 - \frac{k.\Delta y}{4}$
- ☞ Et ayant : $\vec{u}.\vec{n} < 0$: $\quad F_H(t_1^+) \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad F_0 \geq \frac{24.\Delta y.\omega^2}{\pi^2}.\left(m_7 + \frac{J_{B6}}{\ell^2}\right) - \frac{k.\Delta y}{4}$

Donc pour ne pas avoir d'affolement à $\omega = \omega_{max}$ il faut : $\boldsymbol{F_0 \geq \frac{24.\Delta y.\omega_{max}^2}{\pi^2}.\left(m_7 + \frac{J_{B6}}{\ell^2}\right) - \frac{k.\Delta y}{4}}$