Plateau coulissant de chariot : Corrigé

1- Etude cinématique

a- La liaison entre 1 et 0 étant une pivot d'axe $(B, \vec{y})$ on a : $\overrightarrow{V_{B\in 1/0}} = \vec{0}$

On en déduit : $\overrightarrow{V_{I\in 1/0}} = \overrightarrow{V_{B\in 1/0}} + \overrightarrow{IB} \wedge \overrightarrow{\Omega_{1/0}} = \vec{0} - R_1.\vec{z} \wedge \omega_1.\vec{y} = R_1.\omega_1.\vec{x}$

Le roulement sans glissement en I entre 1 et R_i donne : $\overrightarrow{V_{I\in Ri/1}} = \vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{V_{B\in Ri/0}} = \overrightarrow{V_{I\in 1/0}} = R_1.\omega_1.\vec{x}$

La liaison entre R_i et 0 étant une glissière on a : $\overrightarrow{V_{C\in Ri/0}} = \overrightarrow{V_{B\in Ri/0}} = R_1.\omega_1.\vec{x}$

La liaison entre R_i et 2 étant une pivot d'axe $(C, \vec{y})$ on a : $\overrightarrow{V_{C\in 2/0}} = \overrightarrow{V_{C\in Ri/0}} = R_1.\omega_1.\vec{x}$

Enfin le rapport du réducteur étant défini par : $\lambda = \dfrac{\omega_1(t)}{\omega_m(t)}$ On obtient : $\boldsymbol{\overrightarrow{V_{C\in 2/0}} = R_1.\lambda.\omega_m.\vec{x}}$

b- La chaine étant fixée en B, on a : $\overrightarrow{V_{D\in 2/0}} = \vec{0}$ Avec : $\overrightarrow{V_{C\in 2/0}} = \overrightarrow{V_{D\in 2/0}} + \overrightarrow{CD} \wedge \overrightarrow{\Omega_{2/0}}$

Soit : $R_1.\lambda.\omega_m.\vec{x} = \vec{0} - R_2.\vec{z} \wedge \omega_2.\vec{y} = R_2.\omega_2.\vec{x} \Rightarrow \omega_2 = \dfrac{R_1.\lambda}{R_2}.\omega_m$ Soit : $\boldsymbol{\overrightarrow{\Omega_{2/0}} = \dfrac{R_1.\lambda}{R_2}.\omega_m \vec{y}}$

c- La chaine étant fixée en B, on a : $\overrightarrow{V_{D\in 2/0}} = \vec{0}$ Avec : $\overrightarrow{V_{E\in 2/0}} = \overrightarrow{V_{D\in 2/0}} + \overrightarrow{ED} \wedge \overrightarrow{\Omega_{2/0}}$

Soit : $\overrightarrow{V_{E\in 2/0}} = \vec{0} + - 2.R_2.\vec{z} \wedge \omega_2.\vec{y} = 2.R_2.\dfrac{R_1.\lambda}{R_2}.\omega_m \vec{x} \Rightarrow \boldsymbol{\overrightarrow{V_{E\in 2/0}} = \overrightarrow{V_{F\in Rs/0}} = 2.R_1.\lambda.\omega_m.\vec{x}}$

2- Etude cinétique

2.1- Puissances des frottements visqueux

Le mouvement de R_i par rapport à 0 est une translation avec : $\overrightarrow{V_{C\in Ri/0}} = R_1.\lambda.\omega_m.\vec{x}$ Donc :

$$\{\mathcal{V}_{Ri/0}\} = {}_C\begin{Bmatrix} \vec{0} \\ \overrightarrow{V_{C\in Ri/0}} \end{Bmatrix} \text{ Avec : } \overrightarrow{V_{C\in Ri/0}} = R_1.\lambda.\omega_m.\vec{x} \Rightarrow \{\mathcal{V}_{Ri/0}\} = {}_C\begin{Bmatrix} 0 & R_1.\lambda.\omega_m \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{\vec{x},\vec{y},\vec{z}}$$

$$\text{Donc : } P(0\to R_i/0) = {}_C\begin{Bmatrix} \vec{0} \\ \overrightarrow{V_{C\in Ri/0}} \end{Bmatrix} \otimes {}_C\begin{Bmatrix} \overrightarrow{F_{0\to Ri}} \\ \overrightarrow{\mathcal{M}_C(0\to Ri)} \end{Bmatrix} = \overrightarrow{F_{0\to Ri}}.\vec{x}.\overrightarrow{V_{C\in Ri/0}}.\vec{x}$$

D'autre part : $\overrightarrow{F_{0\to Ri}}.\vec{x} = - b.\overrightarrow{V_{C\in Ri/0}}.\vec{x}$ Donc : $P(0\to R_i/0) = - b.\overrightarrow{V_{C\in Ri/0}}^2$

Soit finalement : $\boldsymbol{P(0\to R_i/0) = - b.(R_1.\lambda.\omega_m)^2}$

Le mouvement de R_S par rapport à R_i est une translation. Donc : $\{\mathcal{V}_{Rs/Ri}\} = {}_F\begin{Bmatrix} \vec{0} \\ \overrightarrow{V_{F\in Rs/Ri}} \end{Bmatrix}$

D'autre part on a : $\overrightarrow{V_{F\in Rs/Ri}} = \overrightarrow{V_{F\in Rs/0}} + \overrightarrow{V_{F\in 0/Ri}} = \overrightarrow{V_{F\in Rs/0}} - \overrightarrow{V_{F\in Ri/0}} = 2.R_1.\lambda.\omega_m.\vec{x} - \overrightarrow{V_{F\in Ri/0}}$

Et comme le mouvement de $R_i$par rapport à 0 est une translation : $\overrightarrow{V_{F\in Ri/0}} = \overrightarrow{V_{C\in Ri/0}} = R_1.\lambda.\omega_m.\vec{x}$

On obtient : $\overrightarrow{V_{F\in Rs/Ri}} = 2.R_1.\lambda.\omega_m.\vec{x} - R_1.\lambda.\omega_m.\vec{x} = R_1.\lambda.\omega_m.\vec{x}$

$$\text{Donc : } \{\mathcal{V}_{Rs/Ri}\} = {}_F\begin{Bmatrix} 0 & R_1.\lambda.\omega_m \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{\vec{x},\vec{y},\vec{z}} \text{ Or } P(R_i\to R_s/R_i) = {}_F\begin{Bmatrix} \vec{0} \\ \overrightarrow{V_{F\in Rs/Ri}} \end{Bmatrix} \otimes {}_F\begin{Bmatrix} \overrightarrow{F_{Ri\to Rs}} \\ \overrightarrow{\mathcal{M}_F(Ri\to Rs)} \end{Bmatrix}$$

D'où $P(R_i\to R_s/R_i) = \overrightarrow{F_{Ri\to Rs}}.\vec{x}.\overrightarrow{V_{F\in Rs/Ri}}.\vec{x}$ D'autre part : $\overrightarrow{F_{Ri\to Rs}}.\vec{x} = - b.\overrightarrow{V_{F\in Rs/Ri}}.\vec{x}$

Donc : $P(R_i\to R_s/R_i) = - b.\overrightarrow{V_{F\in Rs/Ri}}^2$ Avec : $\overrightarrow{V_{F\in Rs/Ri}} = R_1.\lambda.\omega_m.\vec{x}$

Soit finalement : $\boldsymbol{P(R_i\to R_s/R_i) = - b.(R_1.\lambda.\omega_m)^2}$

2.2- Application du Théorème de l'énergie cinétique

On a le système $\Sigma = \{Rotor, Réducteur, 1, 2, R_i, R_s\}$ (Avec deux pignon 2)

Calculons l'énergie cinétique de Σ dans son mouvement par rapport à 0

$$E_C(\Sigma/0) = E_C(rotor/0) + E_C(Réducteur/0) + E_C(1/0) + 2.E_C(2/0) + E_C(R_i/0) + E_C(R_S/0)$$

$$E_C(\Sigma/0) = \frac{1}{2}.J_m.\omega_m^2 + \frac{1}{2}.J_r.\omega_m^2 + 0 + 2.\frac{1}{2}.J_{Dz}(2).\omega_2 + \frac{1}{2}.m_i.\overrightarrow{V_{C\in Ri/0}}^2 + \frac{1}{2}.m_S.\overrightarrow{V_{F\in Rs/0}}^2$$

$$E_C(\Sigma/0) = \frac{1}{2}.(J_m + J_r).\omega_m^2 + 2.\frac{1}{2}.J_{Dz}(2).\left(\frac{R_1.\lambda}{R_2}\right)^2.\omega_m^2 + \frac{1}{2}.m_i.(R_1.\lambda.\omega_m)^2 + \frac{1}{2}.m_S.(2.R_1.\lambda.\omega_m)^2$$

D'autre part du théorème de Huygens on a : $J_{Dz}(2) = J_2 + m_2.\overrightarrow{DC}^2 = J_2 + m_2.R_2^2$

Donc : $$E_C(\Sigma/0) = \frac{1}{2}.(J_m + J_r).\omega_m^2 + \frac{1}{2}.2.(J_2 + m_2.R_2^2).\left(\frac{R_1.\lambda}{R_2}\right)^2.\omega_m^2 + \frac{1}{2}.(m_i + 4.m_S).(R_1.\lambda.\omega_m)^2$$

Soit : $\mathbf{E_C(\Sigma/0) = \frac{1}{2}.J_{eq}.\omega_m^2}$ Avec : $\mathbf{J_{eq} = J_m + J_r + 2.J_2.\left(\frac{R_1.\lambda}{R_2}\right)^2 + (m_i + 2.m_2 + 4.m_S).(R_1.\lambda)^2}$

Calculons les puissances de Σ dans son mouvement par rapport à 0

Les actions extérieures s'appliquant sur Σ sont :

- ☞ L'action de la pesanteur sur $\{Rotor, Réducteur, 1, 2, R_i, R_s\}$ (Avec deux pignon 2)
- ☞ L'action de 0 sur R_i due à la liaison glissière avec frottements visqueux
- ☞ L'action du couple moteur sur le rotor du moteur

Si on considère que les centres de gravité de chacune des pièces en rotation sont sur leur axe de rotation on a alors : $\mathbf{P(pes\rightarrow Rotor/0) = P(pes\rightarrow Réducteur/0) = P(pes\rightarrow 1/0) = 0}$

D'autre part on a pour les pièces en translation :

$$P(pes\rightarrow 2/0) = m_2.\overrightarrow{g}.\overrightarrow{V_{C\in 2/0}} = -\ m_2.g.(\cos\alpha.\overrightarrow{z} + \sin\alpha.\overrightarrow{x}).R_1.\lambda.\omega_m.\overrightarrow{x} = -\ m_2.g.\sin\alpha.R_1.\lambda.\omega_m$$

$$P(pes\rightarrow R_i/0) = m_i.\overrightarrow{g}.\overrightarrow{V_{C\in Ri/0}} = -\ m_i.g.(\cos\alpha.\overrightarrow{z} + \sin\alpha.\overrightarrow{x}).R_1.\lambda.\omega_m.\overrightarrow{x} = -\ m_i.g.\sin\alpha.R_1.\lambda.\omega_m$$

$$P(pes\rightarrow R_S/0) = m_S.\overrightarrow{g}.\overrightarrow{V_{F\in Rs/0}} = -\ m_i.g.(\cos\alpha.\overrightarrow{z} + \sin\alpha.\overrightarrow{x}).2.R_1.\lambda.\omega_m.\overrightarrow{x} = -\ 2.m_S.g.\sin\alpha.R_1.\lambda.\omega_m$$

On a vu précédemment que : $P(0\rightarrow R_i/0) = -\ b.(R_1.\lambda.\omega_m)^2$

Enfin le puissance du couple moteur est : $P(\overrightarrow{C_m}\rightarrow Rotor/0) = C_m.\omega_m$

On a donc la somme des puissances des actions extérieures :

$$\Sigma\, P(Ext\rightarrow\Sigma/0) = 2\times P(pes\rightarrow 2/0) + P(pes\rightarrow R_i/0) + P(pes\rightarrow R_S/0) + P(0\rightarrow R_i/0) + P(\overrightarrow{C_m}\rightarrow Rotor/0)$$

$$\mathbf{\Sigma\, P(Ext\rightarrow\Sigma/0) = -\ g.\sin\alpha.R_1.\lambda.(2.m_2 + m_i + 2.m_S).\omega_m - b.(R_1.\lambda)^2.\omega_m^2 + C_m.\omega_m}$$

Enfin toutes les liaisons intérieure sont parfaites sauf celle entre R_S et R_i on a donc :

$$\mathbf{\Sigma\, P(Int\rightarrow\Sigma/0) = P(R_i\rightarrow R_s/R_i) = -\ b.(R_1.\lambda.\omega_m)^2}$$

Appliquons le TEC à Σ:

$$\frac{d\,E_C(\Sigma/0)}{dt} = \Sigma\, P(Ext\rightarrow\Sigma/0) + \Sigma\, P(Int\rightarrow\Sigma/0)$$

$$J_{eq}.\omega_m.\dot{\omega}_m = C_m.\omega_m - g.\sin\alpha.R_1.\lambda.(2.m_2 + m_i + 2.m_S).\omega_m - 2.b.(R_1.\lambda)^2.\omega_m^2$$

$$J_{eq}.\dot{\omega}_m = C_m - g.\sin\alpha.R_1.\lambda.(2.m_2 + m_i + 2.m_S) - 2.b.(R_1.\lambda)^2.\omega_m$$

Qui s'écrit donc : $\mathbf{C_m - (\gamma + \beta.\omega_m) = J_{eq}.\dot{\omega}_m}$ Avec :

$$\mathbf{J_{eq} = J_m + J_r + 2.J_2.\left(\frac{R_1.\lambda}{R_2}\right)^2 + (m_i + 2.m_2 + 4.m_S).(R_1.\lambda)^2}$$

$$\mathbf{\gamma = g.\sin\alpha.R_1.\lambda.(2.m_2 + m_i + 2.m_S)}$$

$$\mathbf{\beta = 2.b.(R_1.\lambda)^2}$$

2.3- Constructio du schéma bloc

L'équation précédente peut également s'écrire : $c_m(t) - \gamma(t) = J_{eq} \cdot \dfrac{d\,\omega_m(t)}{dt} + \beta.\omega_m(t)$ Soit

Dans le domaine de Laplace : $C_m(p) - \Gamma(p) = (\beta + J_{eq}.p).\Omega_m(p)$

$$\Leftrightarrow \quad \mathbf{\Omega_m(p) = \dfrac{1}{\beta + J_{eq}.p}.(C_m(p) - \Gamma(p))}$$

Ainsi que l'équation : $u(t) = R.i(t) + L.\dfrac{d\,i(t)}{dt} + e(t)$ Qui s'écrit dans le domaine de Laplace :

$$U(p) = R.I(p) + L.p.I(p) + E(p) \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{I(p) = \dfrac{1}{R + L.p} \cdot (U(p) - E(p))}$$

Enfin on a les équations : $\mathbf{E(p) = K_V \cdot \Omega_m(p)}$ et : $\mathbf{C_m(p) = K_C \cdot I(p)}$

Ces équations et la description de la structure de l'asservissement permet d'obtenir le schéma bloc :