# Réponses temporelles des SLCI : Démonstrations

## 1- Réponse d'un premier ordre à une entrée en échelon

Pour un premier ordre : $H(p) = \dfrac{K}{1 + \tau.p}$ Pour une entrée en échelon d'amplitude $E_0$ : $E(p) = \dfrac{E_0}{p}$

D'où la réponse à un échelon d'amplitude $E_0$ : $\mathbf{S(p) = \dfrac{K.E_0}{p.(1 + \tau.p)}} = \dfrac{A}{p} + \dfrac{B}{1 + \tau.p} = \dfrac{A + (B + A.\tau).p}{p.(1 + \tau.p)}$

Par identification on en déduit : $A = K.E_0$ et : $B + A.\tau = 0$ Soit : $B = -K.E_0.\tau$

Par conséquent la réponse dans le domaine de Laplace est : $\mathbf{S(p) = \dfrac{K.E_0}{p} - \dfrac{K.E_0}{p + 1/\tau}}$

Or on a les transformée de Laplace : $\mathcal{L}[1] = \dfrac{1}{p}$ et : $\mathcal{L}[e^{-a.t}] = \dfrac{1}{p + a}$

D'où la réponse temporelle : $s(t) = K.E_0 - K.E_0.e^{-t/\tau}$ Soit encore : $\mathbf{s(t) = K.E_0.(1 - e^{-t/\tau})}$

Par dérivation temporelle on obtient donc : $\mathbf{s'(t) = \dfrac{K.E_0}{\tau}. e^{-t/\tau}}$ Donc : $\mathbf{s'(0) = \dfrac{K.E_0}{\tau}}$

## 2- Réponse d'un premier ordre à une entrée en rampe

Pour un premier ordre : $H(p) = \dfrac{K}{1 + \tau.p}$ Pour une entrée en rampe de pente a : $E(p) = \dfrac{a}{p^2}$

D'où la réponse à un échelon d'amplitude $E_0$ : $\mathbf{S(p) = \dfrac{K.a}{p^2.(1 + \tau.p)}}$

$$S(p) = \frac{A}{p} + \frac{B}{p^2} + \frac{C}{1 + \tau.p} = \frac{(A.\tau + C)p^2 + (A + B.\tau).p + B}{p^2.(1 + \tau.p)}$$

Par identification on en déduit : $\left| \begin{array}{c} A.\tau + C = 0 \\ A + B.\tau = 0 \\ B = K.a \end{array} \right.$ Soit : $\left| \begin{array}{c} A = -K.a.\tau \\ B = K.a \\ C = K.a.\tau^2 \end{array} \right.$

Par conséquent la réponse dans le domaine de Laplace est : $S(p) = \dfrac{-K.a.\tau}{p} + \dfrac{K.a}{p^2} + \dfrac{K.a.\tau^2}{1 + \tau.p}$

$$\mathbf{S(p) = \frac{K.a}{p^2} - K.a.\tau.\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p + 1/\tau}\right)}$$

Or on a les transformée de Laplace : $\mathcal{L}[1] = \dfrac{1}{p}$ $\mathcal{L}[t] = \dfrac{1}{p^2}$ et : $\mathcal{L}[e^{-a.t}] = \dfrac{1}{p + a}$

D'où la réponse temporelle : $\mathbf{s(t) = K.a.t - K.a.\tau.(1 - e^{-t/\tau})}$

Par dérivation temporelle on obtient donc : $\mathbf{s'(t) = K.a.(1 - e^{-t/\tau})}$ Donc : $\mathbf{s'(0) = 0}$

**<u>Valeur à l'infini :</u>**

$\lim\limits_{t \to \infty} s(t) = K.a.t - K.a.\tau$ Soit : $\mathbf{\lim\limits_{t \to \infty} s(t) = K.a.(t - \tau)}$

**On a donc une asymptote d'équation : K.a.(t – τ)**

**<u>Si K = 1</u>**

$\lim\limits_{t \to \infty} \left( K.e(t) - s(t) \right) = K.a.\tau - K.a.(t - \tau) = K.a.\tau$

**On en déduit l'erreur de trainage sur la rampe K.a.t :** $\mathbf{\varepsilon_t = a.\tau}$

$\lim\limits_{t \to \infty} \left( K.e(t - \tau) - s(t) \right) = K.a.(t - \tau) - K.a.(t - \tau) = 0$

**Donc la réponse a un retard τ sur la rampe K.a.t.**

# 2- Réponse d'un second ordre à une entrée en échelon

Pour un second ordre : $H(p) = \dfrac{K}{1 + \dfrac{2.\xi}{\omega_0}.p + \dfrac{1}{\omega_0{}^2}.p^2}$ Et une entrée en échelon d'amplitude $E_0$ : $E(p) = \dfrac{E_0}{p}$

D'où la réponse à cet échelon : $\mathbf{S(p)} = \dfrac{\mathbf{K.E_0}}{\mathbf{p.}\left(\mathbf{1 + \dfrac{2.\xi}{\omega_0}.p + \dfrac{1}{\omega_0{}^2}.p^2}\right)} = \dfrac{\mathbf{K.E_0.\omega_0{}^2}}{\mathbf{p.(\,p^2 + 2.\xi.\omega_0.p + \omega_0{}^2\,)}}$

On pose $p_1$ et $p_2$ les solutions de l'équation : $p^2 + 2.\xi.\omega_0.p + \omega_0{}^2 = 0$ $\Delta = 4.\omega_0{}^2.(\xi^2 - 1)$

On a alors : $\mathbf{S(p)} = \dfrac{\mathbf{K.E_0.\omega_0{}^2}}{\mathbf{p.(p - p_1).(p - p_2)}} = \dfrac{A}{p} + \dfrac{B}{p - p_1} + \dfrac{C}{p - p_2}$

Soit encore : $S(p) = \dfrac{A.p^2 - A.(p_1 + p_2).p + A.p_1.p_2 + N.p^2 - B.p.p_2 + Cp^2 - C.p.p_1}{p.(p - p_1).(p - p_2)}$

Par identification on en déduit : $\left|\begin{array}{c} A.p_1.p_2 = K.E_0.\omega_0{}^2 \\ A.(p_1 + p_2) + B.p_2 + C.p_1 = 0 \\ A + B + C = 0 \end{array}\right.$ Soit : $\left|\begin{array}{l} A = \dfrac{K.E_0.\omega_0{}^2}{p_1.p_2} \\ B = \dfrac{K.E_0.\omega_0{}^2}{p_1.(p_1 - p_2)} \\ C = \dfrac{K.E_0.\omega_0{}^2}{p_2.(p_2 - p_1)} \end{array}\right.$

Par conséquent la réponse dans le domaine de Laplace est :

$$\mathbf{S(p)} = \frac{\mathbf{K.E_0.\omega_0{}^2}}{\mathbf{p.p_1.p_2}} + \frac{\mathbf{K.E_0.\omega_0{}^2}}{\mathbf{p_1.(p_1 - p_2).(p - p_1)}} + \frac{\mathbf{K.E_0.\omega_0{}^2}}{\mathbf{p_2.(p_2 - p_1).(p - p_2)}}$$

**<u>Si $\xi < 1$</u>** $\mathbf{\Delta = 4.\omega_0{}^2.(\xi^2 - 1) < 0}$

On alors deux solutions complexes : $\mathbf{p_1 = -\,\omega_0.\left(\,\xi + i.\sqrt{1 - \xi^2}\,\right)}$ et : $\mathbf{p_2 = -\,\omega_0.\left(\,\xi - i.\sqrt{1 - \xi^2}\,\right)}$

On en déduit : $\mathbf{p_1.p_2 = \omega_0{}^2}$ et : $\mathbf{p_1 + p_2 = -\,2.\xi.\omega_0}$

De l'expression précédente en réduisant 2 termes au même dénominateur on obtient la réponse :

$$S(p) = \frac{K.E_0}{p} + \frac{K.E_0.\omega_0{}^2.p_2.(p - p_2) - K.E_0.\omega_0{}^2.p_1.(p - p_1)}{p_1.p_2.(p_1 - p_2)\,.(p - p_1).(p - p_2)}$$

$$S(p) = \frac{K.E_0}{p} + \frac{K.E_0.\omega_0{}^2.(p_2.p - p_2{}^2 + p_1{}^2 - p_1.p)}{p_1.p_2.(p_1 - p_2)\,.(p - p_1).(p - p_2)} = \frac{K.E_0}{p} - \frac{K.E_0.[p.(p_1 - p_2) + p_2{}^2 - p_1{}^2]}{(p_1 - p_2).(p^2 - p.(p_1 + p_2) + p_1.p_2)}$$

$$S(p) = \frac{K.E_0}{p} - \frac{K.E_0.(p_1 - p_2).(p - (p_1 + p_2))}{(p_1 - p_2).(p^2 - p.(p_1 + p_2) + p_1.p_2)} = \frac{K.E_0}{p} - \frac{K.E_0.(p - (p_1 + p_2))}{p^2 - p.(p_1 + p_2) + p_1.p_2}$$

$$S(p) = \frac{K.E_0}{p} - \frac{K.E_0.(p - (p_1 + p_2))}{p^2 - p.(p_1 + p_2) + p_1.p_2}$$

Sachant que l'on a : $p_1.p_2 = \omega_0{}^2$ et : $p_1 + p_2 = -\,2.\xi.\omega_0$ On obtient :

$$S(p) = \frac{K.E_0}{p} - \frac{K.E_0.(p + 2.\xi.\omega_0)}{p^2 + 2.\xi.\omega_0.p + \omega_0{}^2} = \frac{K.E_0}{p} - \frac{K.E_0.(p + \xi.\omega_0)}{(p + \xi.\omega_0)^2 - \xi^2.\omega_0{}^2 + \omega_0{}^2} - \frac{K.E_0.\xi.\omega_0}{(p + \xi.\omega_0)^2 - \xi^2.\omega_0{}^2 + \omega_0{}^2}$$

On en déduit finalement la réponse symbolique :

$$\mathbf{S(p)} = \frac{\mathbf{K.E_0}}{\mathbf{p}} - \frac{\mathbf{K.E_0.(p + \xi.\omega_0)}}{\mathbf{(p + \xi.\omega_0)^2 + \left(\,\omega_0.\sqrt{1 - \xi^2}\,\right)^2}} - \frac{\mathbf{K.E_0.\xi.\omega_0.\sqrt{1 - \xi^2}}}{\mathbf{\sqrt{1 - \xi^2}\,.\left[\,(p + \xi.\omega_0)^2 + \left(\,\omega_0.\sqrt{1 - \xi^2}\,\right)^2\,\right]}}$$

Or on a : $\mathcal{L}[1] = \dfrac{1}{p}$ $\mathcal{L}[e^{-a.t}.\cos(\omega.t)] = \dfrac{p + a}{(p + a)^2 + \omega^2}$ et : $\mathcal{L}[e^{-a.t}.\sin(\omega.t)] = \dfrac{\omega}{(p + a)^2 + \omega^2}$

D'où en posant : $\mathbf{\omega = \omega_0.\sqrt{1 - \xi^2}}$ on peut écrire la réponse temporelle sous la forme :

$$s(t) = K.E_0.\left[\,1 - e^{-\,\xi.\omega_0.t}.\cos(\omega.t) - \frac{e^{-\,\xi.\omega_0.t}}{\sqrt{1 - \xi^2}}.\xi.\sin(\omega.t)\,\right]$$

$$s(t) = K.E_0.\left[1 - \frac{e^{-\xi.\omega_0.t}}{\sqrt{1-\xi^2}}.\left[\sqrt{1-\xi^2}.\cos(\omega.t) + \xi.\sin(\omega.t)\right]\right]$$

D'où en posant φ tel que : **$\xi = \cos\varphi$** **$\sqrt{1-\xi^2} = \sin\varphi$** la réponse temporelle devient :

$$s(t) = K.E_0.\left[1 - \frac{e^{-\xi.\omega_0.t}}{\sqrt{1-\xi^2}}.\left[\sin\varphi.\cos(\omega.t) + \cos\varphi.\sin(\omega.t)\right]\right]$$

$$\mathbf{s(t) = K.E_0.\left[1 - \frac{e^{-\xi.\omega_0.t}}{\sqrt{1-\xi^2}}.\sin(\omega.t + \varphi)\right]}$$ avec : $$\left|\begin{array}{l}\omega = \omega_0.\sqrt{1-\xi^2}\\ \varphi = \arccos\xi\end{array}\right.$$

Par dérivation temporelle on obtient donc :

$$s'(t) = K.E_0.\ \frac{\xi.\omega_0.e^{-\xi.\omega_0.t}}{\sqrt{1-\xi^2}}.\sin(\omega.t + \varphi) - \frac{\omega.e^{-\xi.\omega_0.t}}{\sqrt{1-\xi^2}}.\cos(\omega.t + \varphi)$$

$$s'(t) = \frac{K.E_0.\omega_0}{\sqrt{1-\xi^2}}.\ e^{-\xi.\omega_0.t}.\ \left[\xi.\sin(\omega.t+\varphi) - \sqrt{1-\xi^2}.\cos(\omega.t+\varphi)\right]$$

$$s'(t) = \frac{K.E_0.\omega_0}{\sqrt{1-\xi^2}}.\ e^{-\xi.\omega_0.t}.\ \left[\cos\varphi.\sin(\omega.t+\varphi) - \sin\varphi.\cos(\omega.t+\varphi)\right]$$

On obtient donc : $\mathbf{s'(t) = \frac{K.E_0.\omega_0}{\sqrt{1-\xi^2}}.\ e^{-\xi.\omega_0.t}.\ \sin(\omega.t)}$ Donc : **$s'(0) = 0$**

**<u>Extrémums de cette fonction</u>**

Ces maximums sont aux dates : $t_n = \frac{n.\pi}{\omega}$ et on pour valeurs : $s(t_n) = K.E_0.\left[1 - \frac{e^{-\xi.\omega_0.t}}{\sqrt{1-\xi^2}}.\sin(n.\pi + \varphi)\right]$

Donc : $s(t_n) - S_\infty = K.E_0.\left[1 \pm \frac{e^{\frac{-\xi.\omega_0.n.\pi}{\omega_0.\sqrt{1-\xi^2}}}}{\sqrt{1-\xi^2}}.\sin\varphi\right] - K.E_0 = \pm K.E_0.e^{\frac{-\xi.n.\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}}$

$$\mathbf{\frac{|\,s(t_n) - S_\infty\,|}{S_\infty} = e^{\frac{-\xi.n.\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}}}$$

**<u>Si ξ > 1</u>** **$\Delta = 4.\omega_0^2.(\xi^2 - 1) > 0$**

On alors deux solutions réelles : **$p_1 = -\omega_0.(\xi + \sqrt{\xi^2-1})$** et : **$p_2 = -\omega_0.(\xi - \sqrt{\xi^2-1})$**

On en déduit : **$p_1.p_2 = \omega_0^2$** **$p_1 - p_2 = -2.\omega_0.\sqrt{\xi^2-1}$**

Or réponse symbolique est : $\mathbf{S(p) = \frac{K.E_0.\omega_0^2}{p.p_1.p_2} + \frac{K.E_0.\omega_0^2}{p_1.(p_1-p_2).(p-p_1)} + \frac{K.E_0.\omega_0^2}{p_2.(p_2-p_1).(p-p_2)}}$ Donc :

$$\mathbf{S(p) = \frac{K.E_0}{p} + \frac{K.E_0}{2.\sqrt{\xi^2-1}.(\xi + \sqrt{\xi^2-1}).(p-p_1)} - \frac{K.E_0}{2.\sqrt{\xi^2-1}.(\xi - \sqrt{\xi^2-1}).(p-p_2)}}$$

$$\mathbf{S(p) = \frac{K.E_0}{p} - \frac{K.E_0}{2.\sqrt{\xi^2-1}}.\left[\frac{1}{(\xi - \sqrt{\xi^2-1}).(p-p_2)} - \frac{1}{(\xi + \sqrt{\xi^2-1}).(p-p_1)}\right]}$$

Or on a les transformée de Laplace : $\mathcal{L}[1] = \frac{1}{p}$ et : $\mathcal{L}[e^{-a.t}] = \frac{1}{p+a}$

D'où : $\mathbf{s(t) = K.E_0.\left[1 - \frac{1}{2.\sqrt{\xi^2-1}}.\left[\frac{e^{-\omega_0.(\xi - \sqrt{\xi^2-1}).t}}{\xi - \sqrt{\xi^2-1}} - \frac{e^{-\omega_0.(\xi + \sqrt{\xi^2-1}).t}}{\xi + \sqrt{\xi^2-1}}\right]\right]}$

Et : $\mathbf{s'(t) = \frac{K.E_0.\omega_0}{2.\sqrt{\xi^2-1}}\left(e^{-\omega_0.(\xi + \sqrt{\xi^2-1}).t} - e^{-\omega_0.(\xi - \sqrt{\xi^2-1}).t}\right)}$ Donc : **$s'(0) = 0$**

**Décomposition de la fonction de transfert en deux premiers ordres**

Si $\xi > 1$ : $\mathbf{H(p) = \dfrac{K}{(1 + T_1.p).(1 + T_2.p)} = \dfrac{K}{1 + (T_1 + T_2).p + T_1.T_2.p^2} = \dfrac{K}{1 + \dfrac{2.\xi}{\omega_0}.p + \dfrac{1}{\omega_0^2}.p^2}}$

On en déduit : $\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{T_1.T_2}}$ et : $\xi = \dfrac{T_1 + T_2}{2.\sqrt{T_1.T_2}}$ $\Rightarrow \sqrt{\xi^2 - 1} = \sqrt{\dfrac{(T_1 + T_2)^2}{4.T_1.T_2} - 1}$

Soit : $\sqrt{\xi^2 - 1} = \dfrac{T_1 - T_2}{2.\sqrt{T_1.T_2}}$ et : $\xi - \sqrt{\xi^2 - 1} = \sqrt{\dfrac{T_2}{T_1}}$ $\xi + \sqrt{\xi^2 - 1} = \sqrt{\dfrac{T_1}{T_2}}$

Et également : $-\omega_0.\left(\xi - \sqrt{\xi^2 - 1}\right) = -\dfrac{1}{T_1}$ et : $-\omega_0.\left(\xi + \sqrt{\xi^2 - 1}\right) = -\dfrac{1}{T_2}$

Sachant que : $s(t) = K.E_0.\left[1 - \dfrac{1}{2.\sqrt{\xi^2 - 1}}.\left[\dfrac{e^{-\omega_0.(\xi - \sqrt{\xi^2 - 1}).t}}{\xi - \sqrt{\xi^2 - 1}} - \dfrac{e^{-\omega_0.(\xi + \sqrt{\xi^2 - 1}).t}}{\xi + \sqrt{\xi^2 - 1}}\right]\right]$

On en déduit : $s(t) = K.E_0.\left[1 - \dfrac{\sqrt{T_1.T_2}}{T_1 - T_2}.\left(\sqrt{\dfrac{T_1}{T_2}}.e^{-t/T_1} - \sqrt{\dfrac{T_2}{T_1}}.e^{-t/T_2}\right)\right]$

Donc si $T_1 >> T_2$ $\Rightarrow$ $e^{-t/T_1} >> e^{-t/T_2}$ et $\sqrt{\dfrac{T_1}{T_2}} >> \sqrt{\dfrac{T_2}{T_1}}$ $\Rightarrow$ $\sqrt{\dfrac{T_1}{T_2}}.e^{-t/T_1} >> \sqrt{\dfrac{T_2}{T_1}}.e^{-t/T_2}$

Donc : $s(t) \approx K.E_0.\left[1 - \dfrac{\sqrt{T_1.T_2}}{T_1 - T_2}.\sqrt{\dfrac{T_1}{T_2}}.e^{-t/T_1}\right] = K.E_0.\left[1 - \dfrac{T_1}{T_1 - T_2}.e^{-t/T_1}\right] \approx K.E_0.\left[1 - .e^{-t/T_1}\right]$

On obtient finalement : $\mathbf{s(T_1 + T_2) \approx K.E_0.(1 - e^{-1}) = 0{,}63.K.E_0}$

et : $\mathbf{s(2.T_1 + T_2) \approx K.E_0.(1 - e^{-2}) = 0{,}86.K.E_0}$

# 3- Réponse d'un premier ordre généralisé à une entrée en échelon

Pour un 1ier ordre généralisé : $H(p) = \dfrac{K.(1 + c.\tau.p)}{1 + \tau.p}$ Pour l'entrée en échelon $E_0$ : $E(p) = \dfrac{E_0}{p}$

D'où la réponse à l »échelon $E_0$ : $S(p) = \dfrac{K.E_0.(1 + c.\tau.p)}{p.(1 + \tau.p)} = \dfrac{A}{p} + \dfrac{B}{1 + \tau.p} = \dfrac{A + (B + A.\tau).p}{p.(1 + \tau.p)}$

Par identification on en déduit : $A = K.E_0$ et : $B + A.\tau = K.E_0.c.\tau$ Soit : $B = -K.E_0.\tau.(1 - c)$

Par conséquent la réponse dans le domaine de Laplace est : $\mathbf{S(p) = \dfrac{K.E_0}{p} - \dfrac{K.E_0.(1 - c)}{p + 1/\tau}}$

Or on a les transformée de Laplace : $\mathcal{L}[1] = \dfrac{1}{p}$ et : $\mathcal{L}[e^{-a.t}] = \dfrac{1}{p + a}$

D'où la réponse temporelle : $s(t) = K.E_0 - K.E_0.(1 - c).e^{-t/\tau}$

Soit encore : $\mathbf{s(t) = K.E_0.(1 -} (1 - c)\mathbf{.e^{-t/\tau})}$

On a donc : $\mathbf{S(0) = K.E_0.c}$

et : $\mathbf{\lim\limits_{t \to \infty} s(t) = K.E_0}$