

DS N°1**Automate d'exploration de l'hémostase****Corrigé****2- Analyse de l'exigence "Positionner une seringue au-dessus d'un flacon"****Question 1**

La distance parcourue lors du déplacement correspond à l'aire sous la courbe de vitesse en fonction du temps. Cette courbe étant un trapèze, on a donc :

$$x_M^{\max} = V_M^{\max} \cdot \frac{T + (T - 2 \cdot T_a)}{2}$$

Soit :

$$x_M^{\max} = V_M^x \cdot (T - T_a)$$

Question 2

a- L'application du théorème de l'énergie cinétique nous donne : $C_m = \frac{J_e}{\lambda} \cdot \dot{v}^x$

☞ **Sur la première phase** sachant que : $\dot{v}^x = \frac{V_M^x}{T_a}$ on obtient :

$$C_m = \frac{J_e \cdot V_M^x}{\lambda \cdot T_a}$$

☞ **Sur la deuxième phase** sachant que : $\dot{v}^x = 0$ on obtient :

$$C_m = 0$$

☞ **Sur la troisième phase** sachant que : $\dot{v}^x = -\frac{V_M^{\max}}{T_a}$ on obtient :

$$C_m = -\frac{J_e \cdot V_M^x}{\lambda \cdot T_a}$$

b- La puissance sera maximale pour un couple maximal et une vitesse maximale.

Donc la puissance sera maximale à la fin de la première phase

c- La puissance fournie par le moteur est de : $P = C_m \cdot \omega_M^x$ Sachant que : $\lambda = \frac{v^x}{\omega_M^x}$

La puissance maximale fournie par le moteur est de :

$$P_{\max} = \frac{J_e \cdot V_M^x^2}{\lambda^2 \cdot T_a}$$

d - D'autre par : $x_M^{\max} = V_M^x \cdot (T - T_a)$ Donc :

$$P_{\max} = \frac{J_e \cdot x_M^{\max 2}}{\lambda^2 \cdot T_a \cdot (T - T_a)^2}$$

Question 3

Posons $f(T_a) = T_a \cdot (T - T_a)^2$ on a : $\frac{d f(T_a)}{d T_a} = (T - T_a)^2 - 2 \cdot T_a \cdot (T - T_a) = (T - T_a) \cdot (T - 3 \cdot T_a)$

Donc : $\frac{d f(T_a)}{d T_a} = 0 \Leftrightarrow T_a = \frac{T}{3}$ car : $T_a \in \left[0, \frac{T}{2}\right]$

D'autre part pour : $T_a \in \left[0, \frac{T}{3}\right]$ on a : $\frac{d f(T_a)}{d T_a} > 0$

Donc : $T_a \cdot (T - T_a)^2$ est maximal pour $T_a = \frac{T}{3}$ Sachant que : $P_{\max} = \frac{J_e \cdot x_M^{\max 2}}{\lambda^2 \cdot T_a \cdot (T - T_a)^2}$

On en déduit que la puissance est minimale pour $T_a = \frac{T}{3}$

Question 4

On sait que : $x_M^{\max} = V_M^x \cdot (T - T_a)$ Donc pour $T_a = \frac{T}{3}$ $x_M^{\max} = V_M^x \cdot \left(T - \frac{T}{3}\right) = \frac{2 \cdot T}{3} \cdot V_M^x$

On obtient donc : $V_M^x = \frac{3 \cdot x_M^{\max}}{2 \cdot T}$ Avec : $V_M^x = R_p \cdot k \cdot \omega_{\max}^x$ Soit : $R_p \cdot k \cdot \omega_{\max}^x = \frac{3 \cdot x_M^{\max}}{2 \cdot T}$

On en déduit la vitesse de rotation maximale que doit atteindre le moteur :

$$\omega_{\max}^x = \frac{3 \cdot x_M^{\max}}{2 \cdot T \cdot R_p \cdot k} = \frac{3 \times 0,55}{2 \times 1 \times 0,02 \times 0,1} = 412,5 \text{ rad/s}$$

Or la fréquence de rotation maximale que peut atteindre le moteur est de $N_{\max}^{\text{mot}} = 4\,150 \text{ tr/min}$. Soit une vitesse de rotation de : $\omega_{\max}^{\text{mot}} = \frac{2\pi \cdot N_{\max}^{\text{mot}}}{60} = 435 \text{ rad/s} > 412,5 \text{ rad/s}$.

Le choix du moteur est donc validé.

3- Analyse de l'exigence "Mettre la bille en oscillation"

Question 5

a- On a : $\vec{V}_{G \in \text{bille}/0} = \left(\frac{d \vec{OG}}{dt} \right)_{R_0} = \left(\frac{d (R-r) \cdot \vec{z}_1}{dt} \right)_{R_0} = \left(\frac{d (R-r) \cdot \vec{z}_1}{dt} \right)_{R_1} + \vec{\Omega}_{R1/R0} \wedge (R-r) \cdot \vec{z}_1$

Soit : $\vec{V}_{G \in \text{bille}/0} = \vec{0} + \dot{\theta} \cdot \vec{y}_1 \wedge (R-r) \cdot \vec{z}_1 = \dot{\theta} \cdot (R-r) \cdot \vec{x}_1$ Sachant que : $\vec{V}_{G \in \text{bille}/0} = v \cdot \vec{x}_1$

On obtient : $v = \dot{\theta} \cdot (R-r)$

b- D'autre part : $\vec{V}_{I \in \text{bille}/0} = \vec{V}_{G \in \text{bille}/0} + \vec{\Omega}_{\text{bille}/0} \wedge \vec{GI} = v \cdot \vec{x}_1 + \omega_b \cdot \vec{y}_1 \wedge r \cdot \vec{z}_1 = (v + \omega_b \cdot r) \cdot \vec{x}_1$

Or la condition de roulement sans glissement impose que : $\vec{V}_{I \in \text{bille}/0} = \vec{0}$ soit : $v = -r \cdot \omega_b$

Des deux relations précédente, on obtient : $\dot{\theta} \cdot (R-r) = -r \cdot \omega_b$ Soit : $\omega_b = \dot{\theta} \cdot \frac{r-R}{r}$

Question 6

Le vecteur accélération du centre de gravité G de la bille est : $\vec{a}_{G \in \text{bille}/0} = \left(\frac{d \vec{V}_{G \in \text{bille}/0}}{dt} \right)_{R_0}$

Soit : $\vec{a}_{G \in \text{bille}/0} = \left(\frac{d \dot{\theta} \cdot (R-r) \cdot \vec{x}_1}{dt} \right)_{R_0} = \left(\frac{d \dot{\theta} \cdot (R-r) \cdot \vec{x}_1}{dt} \right)_{R_1} + \vec{\Omega}_{R1/R0} \wedge \dot{\theta} \cdot (R-r) \cdot \vec{x}_1$

Soit : $\vec{a}_{G \in \text{bille}/0} = \ddot{\theta} \cdot (R-r) \cdot \vec{x}_1 + \dot{\theta} \cdot \vec{y}_1 \wedge \dot{\theta} \cdot (R-r) \cdot \vec{x}_1$

On obtient donc : $\vec{a}_{G \in \text{bille}/0} = \ddot{\theta} \cdot (R-r) \cdot \vec{x}_1 - \dot{\theta}^2 \cdot (R-r) \cdot \vec{z}_1$

Question 7

Le théorème de Huygens appliqué à la bille permet d'écrire $J_I = J_G + m \cdot \|\vec{IG}\|^2$ car $\vec{IG} \perp \vec{y}_0$

Or : $\vec{IG} = -r \cdot \vec{z}_1$ Donc : $J_I = \frac{2}{5} \cdot m \cdot r^2 + m \cdot r^2 = \frac{7}{5} \cdot m \cdot r^2$

Le mouvement de la bille par rapport au rail 0 s'apparente d'un point de vue dynamique à une rotation autour d'un axe supposé fixe $(I, \vec{y}_1) = (I, \vec{y}_1)$ à la vitesse de rotation ω_b Donc :

$\vec{\delta}_I(\text{bille}/0) \cdot \vec{y}_1 = J_I \cdot \dot{\omega}_b$ or : $\omega_b = \dot{\theta} \cdot \frac{r-R}{r}$ Donc : $\vec{\delta}_I(\text{bille}/0) \cdot \vec{y}_1 = \frac{7}{5} \cdot m \cdot r^2 \cdot \frac{r-R}{r} \cdot \ddot{\theta}$

On obtient donc : $\vec{\delta}_I(\text{bille}/0) \cdot \vec{y}_1 = \frac{7}{5} \cdot m \cdot r \cdot (r-R) \cdot \ddot{\theta}$

Question 8

a- Les actions extérieures s'appliquant sur la bille sont :

- ☞ Le poids de la bille : Force appliquée au point G de vecteur $m \cdot g \cdot \vec{z}_0$
- ☞ Action du fluide sur la bille : Force appliquée au point G de vecteur $-f_v \cdot v \cdot \vec{x}_1$
- ☞ Action du rail sur la bille : Force appliquée au point I de vecteur $T_1 \cdot \vec{x}_1 - N_1 \cdot \vec{z}_1$
- ☞ Action de la bobine sur la bille : Force appliquée au point G de vecteur $F(t) \cdot \vec{x}_0$

Le théorème du moment dynamique en I en projection sur l'axe $\vec{y}_1$ donne :

$\vec{\delta}_I(\text{bille}/0) \cdot \vec{y}_1 = \vec{IG} \wedge m \cdot g \cdot \vec{z}_0 \cdot \vec{y}_1 + \vec{IG} \wedge (-f_v \cdot v \cdot \vec{x}_1) \cdot \vec{y}_1 + \vec{0} + \vec{IG} \wedge F(t) \cdot \vec{x}_0 \cdot \vec{y}_1$

Avec : $\vec{IG} = -r \cdot \vec{z}_1$ $\vec{\delta}_I(\text{bille}/0) \cdot \vec{y}_1 = \frac{7}{5} \cdot m \cdot r \cdot (r-R) \cdot \ddot{\theta}$ $v = (R-r) \cdot \dot{\theta}$

$$\text{Donc : } \frac{7}{5}.m.r.(r-R).\ddot{\theta} = \vec{y}_1 \wedge (-r.\vec{z}_1).m.g.\vec{z}_0 - r.\vec{z}_1 \wedge (-f_v.v.\vec{x}_1).\vec{y}_1 + \vec{y}_1 \wedge (-r.\vec{z}_1).F(t).\vec{x}_0$$

$$\text{Soit : } \frac{7}{5}.m.r.(r-R).\ddot{\theta} = m.g.r.\sin \theta + r.f_v.(R-r).\dot{\theta} - r.F(t).\cos \theta$$

$$\text{Ou : } \frac{7}{5}.m.(R-r).\ddot{\theta} + f_v.(R-r).\dot{\theta} + m.g.\sin \theta = F(t).\cos \theta$$

$$\text{On obtient donc : } a_0.\ddot{\theta} + b_0.f_v.\dot{\theta} + c_0.\sin \theta = F(t).\cos \theta \quad \text{avec :}$$

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{7}{5}.m.(R-r) \\ b_0 &= R-r \\ c_0 &= m.g \end{aligned}$$

Question 9

La linéarisation de l'équation (3) pour un angle θ petit ($\cos \theta \approx 1$ et $\sin \theta \approx \theta$) donne :

$$F(t) = a_0.\ddot{\theta} + b_0.f_v.\dot{\theta} + c_0.\theta$$

$$\text{Soit dans le domaine de Laplace : } F(p) = a_0.p^2.\Theta(p) + b_0.f_v.p.\Theta(p) + c_0.\Theta(p)$$

$$\text{On obtient donc la fonction de transfert : } H(p) = \frac{\Theta(p)}{F(p)} = \frac{1}{c_0 + b_0.f_v.p + a_0.p^2}$$

$$\text{Soit : } H(p) = \frac{\frac{1}{c_0}}{1 + \frac{b_0.f_v}{c_0}.p + \frac{a_0}{c_0}.p^2}$$

Une fonction de transfert du second ordre dont :

$$\text{Le gain statique est : } K_S = \frac{1}{c_0}$$

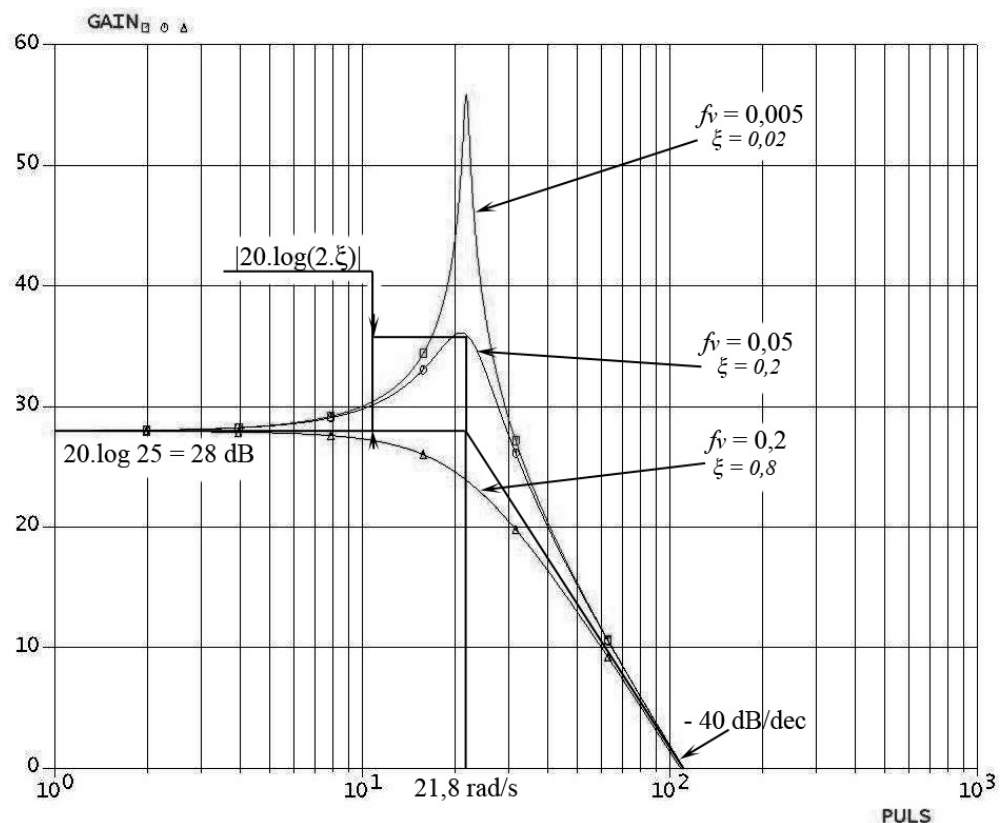
La pulsation propre non amortie est :

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{c_0}{a_0}}$$

$$\text{De facteur d'amortissement : } \xi = \frac{\omega_0}{2} \cdot \frac{b_0.f_v}{c_0} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{c_0}{a_0}} \cdot \frac{b_0.f_v}{c_0} \quad \text{Soit :}$$

$$\xi = \frac{b_0.f_v}{2 \cdot \sqrt{a_0 \cdot c_0}}$$

Question 10



Question 11

L'expression du gain dynamique est : $G_{db}(\omega) = 20.\log K_S - 10.\log((1 - u^2)^2 + 4.\xi^2.u^2)$ avec : $u = \frac{\omega}{\omega_0}$

Donc pour une pulsation égale à la pulsation propre ($\omega_{bob} = \omega_0$) le gain dynamique est :

$$G_{db}(\omega_0) = 20.\log K_S - 20.\log(2.\xi) \text{ et dépend du facteur d'amortissement } \xi \text{ et donc de } f_v.$$

De même à la pulsation de résonnance $\omega = \omega_r = \omega_0.\sqrt{1 - 2.\xi^2}$ le gain dynamique est :

$$G_{db}(\omega_r) = 20.\log K_S - 20.\log(2.\xi.\sqrt{1 - \xi^2}) \text{ expression qui dépend de } \xi \text{ et donc de } f_v.$$

Cependant cette pulsation de résonnance ω_r dépend de ξ et doit donc varier car le coefficient de frottement f_v varie au cours de la mesure. Ce qui est en contradiction avec le principe de la mesure durant laquelle la pulsation ω_{bob} sera constante.

Pour observer au mieux l'évolution du coefficient de frottement il faut donc une pulsation égale à la pulsation propre du système non amorti : $\omega_{bob} = \omega_0$.

Question 12

a- Pour $\omega_{bob} \rightarrow 0$ le gain dynamique en dB est de : $20.\log\left(\frac{A_0}{E}\right) = 20 \log K_S$

Pour $\omega_{bob} = \omega_0$ le gain dynamique en dB est de : $20.\log\left(\frac{A_{\omega_0}}{E}\right) = 20 \log K_S - 20.\log(2.\xi)$

On a donc : $20.\log\left(\frac{A_0}{E}\right) - 20.\log\left(\frac{A_{\omega_0}}{E}\right) = 20.\log\left(\frac{A_0}{A_{\omega_0}}\right) = 20.\log(2.\xi)$

D'où le rapport des amplitudes : $\frac{A_0}{A_{\omega_0}} = 2.\xi$ Soit dans notre cas où $\xi = 4.f_v$: $\frac{A_0}{A_{\omega_0}} = 8.f_v$

b- Sur la figure 13-a on mesure une amplitude pour $\omega_{bob} = 1 \text{ rad/s}$ une amplitude $A_0 = 0,055^\circ$

Sur la figure 13-c on mesure une amplitude pour $\omega_{bob} = 21,8 \text{ rad/s}$ une amplitude $A_{\omega_0} = 6,5^\circ$

D'où la valeur du coefficient d'amortissement : $\xi = \frac{1}{2} \cdot \frac{0,055}{6,5} = 4,23.10^{-3}$

c- Sachant que : $\xi = 4.f_v$ et que : $f_v = 6.\pi.r.\eta$ on en déduit la viscosité :

$$\eta = \frac{\xi}{24.\pi.r} = \frac{1,06.10^{-3}}{6.\pi.5.10^{-3}} = 0,011 \text{ Pa.s}$$

d- Au fur et à mesure de la coagulation du sang le coefficient de frottement f_v augmente.

Donc le rapport $\frac{A_0}{A_{\omega_0}}$ augmentant l'amplitude A_{ω_0} de l'angle θ va diminuer.

Question 13

Par la relation de Varignon appliquée au torseur dynamique on a :

$$\overrightarrow{\delta_G}(\text{bille}/0). \overrightarrow{y_1} = \overrightarrow{\delta_I}(\text{bille}/0). \overrightarrow{y_1} + \overrightarrow{GI} \wedge m. \overrightarrow{a_{G \in \text{bille}/0}}. \overrightarrow{y_1}$$

Or : $\overrightarrow{\delta_I}(\text{bille}/0). \overrightarrow{y_1} = \frac{7}{5}.m.r.(r-R).\ddot{\theta}$ $\overrightarrow{GI} = r. \overrightarrow{z_1}$ $\overrightarrow{a_{G \in \text{bille}/0}} = \ddot{\theta}.(R-r). \overrightarrow{x_1} - \dot{\theta}^2.(R-r). \overrightarrow{z_1}$

Donc : $\overrightarrow{\delta_G}(\text{bille}/0). \overrightarrow{y_1} = \frac{7}{5}.m.r.(r-R).\ddot{\theta} + r. \overrightarrow{z_1} \wedge m. (\ddot{\theta}.(R-r). \overrightarrow{x_1} - \dot{\theta}^2.(R-r). \overrightarrow{z_1}). \overrightarrow{y_1}$

Soit : $\overrightarrow{\delta_G}(\text{bille}/0). \overrightarrow{y_1} = \frac{7}{5}.m.r.(r-R).\ddot{\theta} + m.r.(R-r).\ddot{\theta} = \left(\frac{7}{5} - 1\right).m.r.(r-R).\ddot{\theta}$

Soit finalement : $\overrightarrow{\delta_G}(\text{bille}/0). \overrightarrow{y_1} = \frac{2}{5}.m.r.(r-R).\ddot{\theta}$

Question 14

Les actions extérieures s'appliquant sur la bille sont :

- ☞ Le poids de la bille : Force appliquée au point G de vecteur $m.g. \vec{z_0}$
- ☞ Action du fluide sur la bille : Force appliquée au point G de vecteur $-f_v.v. \vec{x_1}$
- ☞ Action du rail sur la bille : Force appliquée au point I de vecteur $T_1. \vec{x_1} - N_1. \vec{z_1}$
- ☞ Action de la bobine sur la bille : Force appliquée au point G de vecteur $F(t). \vec{x_0}$

Le théorème du moment dynamique en G en projection sur l'axe $\vec{y_1}$ qui donne :

$$\delta_G(\text{bille}/0). \vec{y_1} = 0 + 0 + \vec{GI} \wedge (T_1. \vec{x_1} - N_1. \vec{z_1}). \vec{y_1} + 0 = r. \vec{z_1} \wedge (T_1. \vec{x_1} - N_1. \vec{z_1}). \vec{y_1} = r.T_1$$

Donc : $\frac{2}{5}.m.r.(r-R).\ddot{\theta} = r.T_1$ Soit : $T_1 = a_1.\ddot{\theta}$ avec : $a_1 = \frac{2}{5}.m.(r-R)$

Question 15

Le théorème de la résultante dynamique en projection sur l'axe $\vec{z_1}$ donne également :

$$m. \vec{a_{G \in \text{bille}/0}} \cdot \vec{z_1} = m.g. \vec{z_0} \cdot \vec{z_1} - f_v.v. \vec{x_1} \cdot \vec{z_1} + T_1. \vec{x_1} \cdot \vec{z_1} - N_1. \vec{z_1} \cdot \vec{z_1} + F(t). \vec{x_0} \cdot \vec{z_1}$$

$$m.(\ddot{\theta}.(R-r). \vec{x_1} - \dot{\theta}^2.(R-r). \vec{z_1}). \vec{z_1} = m.g. \vec{z_0} \cdot \vec{z_1} - N_1. + F(t). \vec{x_0} \cdot \vec{z_1}$$

Ayant : $\vec{z_0} \cdot \vec{z_1} = \cos \theta$ et : $\vec{x_0} \cdot \vec{z_1} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin \theta$

On obtient donc : $N_1 = F(t).\sin \theta + b_1.\cos \theta + c_1.\dot{\theta}^2$ Avec : $\begin{cases} b_1 = m.g \\ c_1 = m.(R-r) \end{cases}$

Question 16

Les relations de récurrence de l'approximation d'Euler sont :

$$\theta_{i+1} = \theta_i + h.\dot{\theta}_i \quad \text{et} : \quad \dot{\theta}_{i+1} = \dot{\theta}_i + h.\ddot{\theta}_i \quad \text{Or} : \quad Y_i = \begin{pmatrix} \theta_i \\ \dot{\theta}_i \end{pmatrix} \quad \text{et} : \quad F(t_i, Y_i) = \begin{pmatrix} \dot{\theta}_i \\ \ddot{\theta}_i \end{pmatrix}$$

Donc la relation de récurrence liant Y_{i+1} à Y_i est : $Y_{i+1} = Y_i + h.F(t_i, Y_i)$

Question 17

def fi(ti, Yi):

theta, thetap = Yi[0], Yi[1]

thetapp = (F0*sin(wbob*ti)*cos(theta) - fv*b0*thetap - c0*sin(theta))/a0

return [thetap, thetapp]

Question 18

def Euler(Yini, h, Tmaxi, F):

n = int(Tmaxi/h)

RY = [[0, Yini[0], Yini[1]]]

for i in range(0, n):

ti, thetai, thetapi = RY[i][0], RY[i][1], RY[i][2]

vecteur = F(ti, [thetapi, thetapi])

RY.append([ti+h, thetai+h*vecteur[0], thetapi+h*vecteur[1]])

return RY

Question 19

```

def VerifRSG(SY,f):
    for element in SY:
        ti,theta,thetap=element[0],element[1],element[2]
        thetapp=fi(ti,[theta,thetap])[1]
        T1,N1=a1*thetapp, F0*sin(wbob*ti)*sin(theta)+b1*cos(theta)+c1*tetap**2
        coef=abs(T1/N1)
        if coef>f:
            return False
    return True

```

Question 20

La figure 14-b montre une amplitude qui reste inférieure à $10^\circ = 0,17 \text{ rad}$ (angle θ faible).
L'hypothèse de linéarisation est donc vérifiée.

La figure 15 montre un rapport T_1/N_1 inférieur au coefficient de frottement de 0,1 entre la bille et le rail. **L'hypothèse du roulement sans glissement est donc vérifiée.**

5- Analyse de l'exigence "Prélever les produits par le déplacement suivant $\vec{z}$ de la tête de pipetage"

Question 21

L'énergie cinétique de l'ensemble des pièces en mouvement est La somme des énergies cinétiques :

$$E_C(S/R_g) = E_C(\text{moteur}/R_g) + E_C(\text{réducteur}/R_g) + E_C(\text{masse}/R_g) = \frac{1}{2} J_m \cdot \omega_m^2 + \frac{1}{2} J_r \cdot \omega_m^2 + \frac{1}{2} m \cdot v^2$$

Où v est la vitesse de translation de la masse en translation : $v = k_r \cdot R_p \cdot \omega_m$

$$\text{On en déduit : } E_C(S/R_g) = \frac{1}{2} (J_m + J_r) \cdot \omega_m^2 + \frac{1}{2} m \cdot k_r^2 \cdot R_p^2 \cdot \omega_m^2 = \frac{1}{2} (J_m + J_r + m \cdot k_r^2 \cdot R_p^2) \cdot \omega_m^2$$

D'où l'inertie équivalente des pièces en mouvement : **$J_{eq} = J_m + J_r + m \cdot k_r^2 \cdot R_p^2$**

Question 22

a- Les actions extérieures appliquées sur l'ensemble S des pièces en mouvement sont :

- ☞ Le couple moteur dont la puissance est : $P(\text{Couple moteur} \rightarrow S/R_g) = c_m \cdot \omega_m$
- ☞ Le poids des pièces en mouvement dont la puissance est : $P(\text{Pesanteur} \rightarrow S/R_g) = -m \cdot g \cdot v$
- ☞ L'action de l'opercule sur l'aiguille dont la puissance est : $P(\text{Opércule} \rightarrow S/R_g) = -F_r(t) \cdot v$
- ☞ Les actions dues aux liaisons avec le bâti dont les puissances sont nulles car les liaisons sont parfaites.

On obtient donc pour la somme des puissances de ces actions : $P_{Ext}(S/R_g) = c_m \cdot \omega_m - F_r(t) \cdot v - m \cdot g \cdot v$

avec : $v = k_r \cdot R_p \cdot \omega_m$ Soit : $\Sigma P_{Ext}(S/R_g) = (c_m - F_r(t) \cdot k_r \cdot R_p - m \cdot g \cdot k_r \cdot R_p) \cdot \omega_m$

L'ensemble des frottements sont modélisés par un couple résistant c_{res} ramené sur l'arbre moteur.
 Donc la somme des puissances des actions intérieures est : $P_{Int}(S/R_g) = c_{res} \cdot \omega_m$ avec : $c_{res} < 0$

L'application du théorème de l'énergie puissance : $\frac{d E_C(S/R_g)}{dt} = \Sigma P(Ext \rightarrow S/R_g) + \Sigma P(Int \rightarrow S/R_g)$

donne donc : $(J_m + J_r + m \cdot k_r^2 \cdot R_p^2) \cdot \dot{\omega}_m \cdot \omega_m = (c_m - F_r(t) \cdot k_r \cdot R_p - m \cdot g \cdot k_r \cdot R_p) \cdot \omega_m + c_{res} \cdot \omega_m$

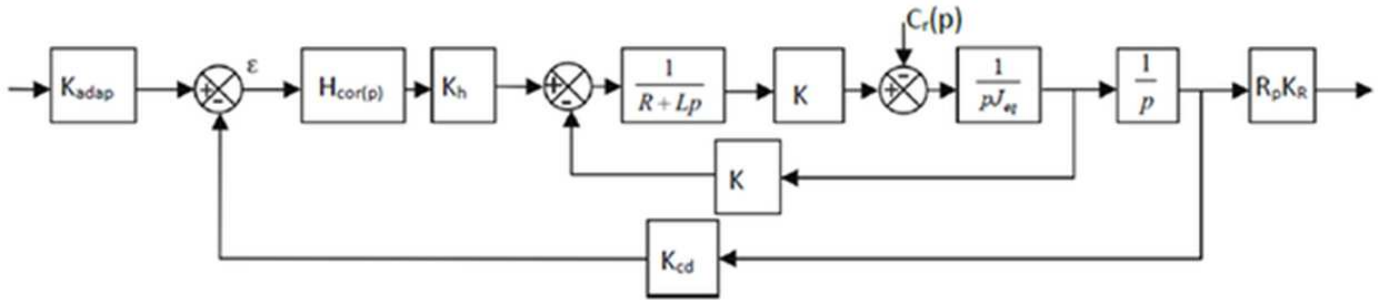
Soit en simplifiant par ω_m : **$(J_m + J_r + m \cdot k_r^2 \cdot R_p^2) \cdot \dot{\omega}_m = c_m - F_r(t) \cdot k_r \cdot R_p - m \cdot g \cdot k_r \cdot R_p + c_{res}$**

b- Soit : **$c_m(t) = c_r(t) + J_{eq} \cdot \dot{\omega}_m$** avec : $J_{eq} = J_m + J_r + m \cdot k_r^2 \cdot R_p^2$

c- et : **$c_r(t) = F_r(t) \cdot k_r \cdot R_p + m \cdot g \cdot k_r \cdot R_p - c_{res}$**

Question 23

A partir de la transformée de Laplace des différentes équations (4), (5), (6) et (7) de fonctionnement du système et de celles de la transmission : $\omega_m(t) = \frac{d\theta_m(t)}{dt}$ et : $z(t) = k_r \cdot R_p \cdot \theta_m(t)$ on obtient :

**Question 24**

Pour avoir un écart $\varepsilon(t)$ proportionnel à l'erreur $z_c(t) - z(t)$ il faut un gain :

$$K_{\text{adapt}} = \frac{k_{\text{cod}}}{R_p \cdot k_r}$$

Question 25

La réduction de la boucle du moteur du schéma bloc ci-dessus donne :

$$\left(\frac{\Omega_m(p)}{U(p)} \right)_{c_{r0}=0} = \frac{\frac{K}{(R+L \cdot p) \cdot J_{eq} \cdot p}}{1 + \frac{K^2}{(R+L \cdot p) \cdot J_{eq} \cdot p}} \quad \text{soit :} \quad \left(\frac{\Omega_m(p)}{U(p)} \right)_{c_{r0}=0} = \frac{\frac{1}{K}}{1 + \frac{R \cdot J_{eq}}{K^2} \cdot p + \frac{L \cdot J_{eq}}{K^2} \cdot p^2}$$

On a : $\left(\frac{I(p)}{U(p)} \right)_{c_{r0}=0} = \left(\frac{I(p)}{\Omega_m(p)} \right)_{c_{r0}=0} \cdot \left(\frac{\Omega_m(p)}{U(p)} \right)_{c_{r0}=0}$ avec suivant le schéma bloc : $\left(\frac{I(p)}{\Omega_m(p)} \right)_{c_{r0}=0} = \frac{J_{eq} \cdot p}{K}$

On en déduit :

$$\left(\frac{I(p)}{U(p)} \right)_{c_{r0}=0} = \frac{\frac{J_{eq} \cdot p}{K^2}}{1 + \frac{R \cdot J_{eq}}{K^2} \cdot p + \frac{L \cdot J_{eq}}{K^2} \cdot p^2}$$

Question 26

a- Sur le document réponse, la courbe donnant l'évolution de la vitesse de rotation $\omega_m(t)$ lorsque le système est soumis à un échelon de tension $u(t) = u_0$ présente une pente de tangente non nulle à l'origine. On a donc la réponse d'un système du 1er ordre. **On peut donc négliger le terme du second ordre soit l'inductance du moteur devant les autres grandeurs physiques.**

On a alors : $\left(\frac{\Omega_m(p)}{U(p)} \right)_{c_{r0}=0} = \frac{\frac{1}{K}}{1 + \frac{R \cdot J_{eq}}{K^2} \cdot p}$ et : $\left(\frac{I(p)}{U(p)} \right)_{c_{r0}=0} = \frac{\frac{J_{eq} \cdot p}{K^2}}{1 + \frac{R \cdot J_{eq}}{K^2} \cdot p}$

b- A la date $t=0$ la vitesse de rotation est nulle : $\omega_m(0) = 0$. Donc de l'équation (6) on a : $e(0) = 0$.

L'inductance L étant négligée on obtient de l'équation (5) : $u(0) = R \cdot i(0)$ Soit : $i_0 = \frac{u_0}{R}$ (a)

Pour $t \rightarrow \infty$ la vitesse de rotation est constante : $\dot{\omega}_m(\infty) = 0$. Donc de l'équation (4) : $c_r(\infty) = c_m(\infty)$.

On en déduit de l'équation (7) que : $c_r(\infty) = K \cdot i(\infty)$ Soit : $i_\infty = \frac{c_{r0}}{K}$ (b)

L'inductance L étant négligée on obtient des équations (5) et (6) : $u(\infty) = R \cdot i(\infty) + K \cdot \omega_m(\infty)$

Sachant que : $i(\infty) = i_\infty = \frac{c_{r0}}{K}$ et : $u(\infty) = u_0$ on obtient : $\omega_\infty = \frac{u_0}{K} - \frac{R \cdot c_{r0}}{K^2}$ (c)

c- Des graphiques du document réponse on a : $\omega_\infty = 575 \text{ rad/s}$ $i_0 = 0,42 \text{ A}$ $i_\infty = 0,075 \text{ A}$

On obtient donc : De l'équation (a) : $R = \frac{u_0}{i_0} = \frac{24}{0,42} = 57,1 \Omega$

Des équations (b) et (c) : $\omega_\infty = \frac{u_0}{K} - \frac{R \cdot i_\infty}{K} = \frac{u_0}{K} - \frac{R \cdot i_\infty}{K}$

Soit : $K = \frac{u_0 - R \cdot i_\infty}{\omega_\infty} = \frac{24 - 57,1 \times 0,075}{575} = 0,0343 \text{ V.s.rad}^{-1} \text{ ou N.m.A}^{-1}$

d- De l'équation (b) on obtient : $c_{r0} = K \cdot i_\infty = 0,0343 \times 0,075 = 2,57 \cdot 10^{-3} \text{ N.m}$

D'autre part on sait que (voir question 28a) : $\left(\frac{\Omega_m(p)}{U(p)} \right)_{c_{r0}=0} = \frac{\frac{1}{K}}{1 + \frac{R \cdot J_{eq}}{K^2} \cdot p}$ donc cette fonction de

transfert est un premier ordre de constante de temps : $\tau = \frac{R \cdot J_{eq}}{K^2}$. Constante de temps τ qui peut être lue sur le graphique $\omega_m(t)$ à la date où $\omega_m(t) = 0,63 \times \omega_\infty = 3,62 \text{ rad.s}^{-1}$. Soit : $\tau = 0,03 \text{ s}$.

On a donc : $J_{eq} = \frac{\tau \cdot K^2}{R} = \frac{0,03 \times 0,0343^2}{57,1} = 6,2 \cdot 10^{-7} \text{ kg.m}^2$

Question 27

Du schéma bloc à retour unitaire de la page 14/19 de l'énoncé on obtient :

Pour la boucle ouverte $H_{bo}(p) = \frac{K_p \cdot K_1}{p \cdot (1 + T_m \cdot p)}$

Pour la boucle fermée : $H_{cr}(p) = \frac{\frac{-K_2 \cdot K_1}{p \cdot (1 + T_m \cdot p)}}{1 + \frac{K_1 \cdot K_p}{p \cdot (1 + T_m \cdot p)}} = \frac{-\frac{K_2}{K_p}}{1 + \frac{1}{K_p \cdot K_1} \cdot p + \frac{T_m}{K_p \cdot K_1} \cdot p^2}$

Et :

$H_{cons}(p) = \frac{\frac{K_p \cdot K_1}{p \cdot (1 + T_m \cdot p)}}{1 + \frac{K_p \cdot K_1}{p \cdot (1 + T_m \cdot p)}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{K_p \cdot K_1} \cdot p + \frac{T_m}{K_p \cdot K_1} \cdot p^2}$

Question 28

L'erreur statique est : $(\varepsilon_s)_{c_{r0}=0} = \lim_{t \rightarrow \infty} (z_c(t) - z(t)) = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot (Z_c(p) - Z(p))$ avec : $Z_c(p) = \frac{Z_{c0}}{p}$

Or pour une perturbation nulle : $Z(p) = H_{cons}(p) \cdot Z_c(p)$. Donc : $(\varepsilon_s)_{c_{r0}=0} = \lim_{p \rightarrow 0} Z_{c0} \cdot (1 - H_{cons}(p))$

Or de l'expression précédente on a : $\lim_{p \rightarrow 0} H_{cons}(p) = 1$ Donc : $(\varepsilon_s)_{c_{r0}=0} = 0$

D'autre part pour une consigne nulle : $Z(p) = H_{cr}(p) \cdot C_r(p)$ avec : $C_r(p) = \frac{C_{r0}}{p}$

Donc : $(\varepsilon_s)_{z_c=0} = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot (0 - H_{cr}(p) \cdot C_r(p)) = \lim_{p \rightarrow 0} -C_{r0} \cdot H_{cr}(p)$

Or de l'expression précédente on a : $\lim_{p \rightarrow 0} H_{cr}(p) = -\frac{K_2}{K_p}$ Donc : $(\varepsilon_s)_{z_c=0} = \frac{K_2 \cdot C_{r0}}{K_p}$

L'erreur statique totale est donc de : $\varepsilon_s = \frac{K_2 \cdot C_{r0}}{K_p}$. Le cahier des charges imposant une erreur statique maximale ε_{smax} inférieure à 1 mm, pour vérifier le cahier des charges il faut un gain du correcteur K_p :

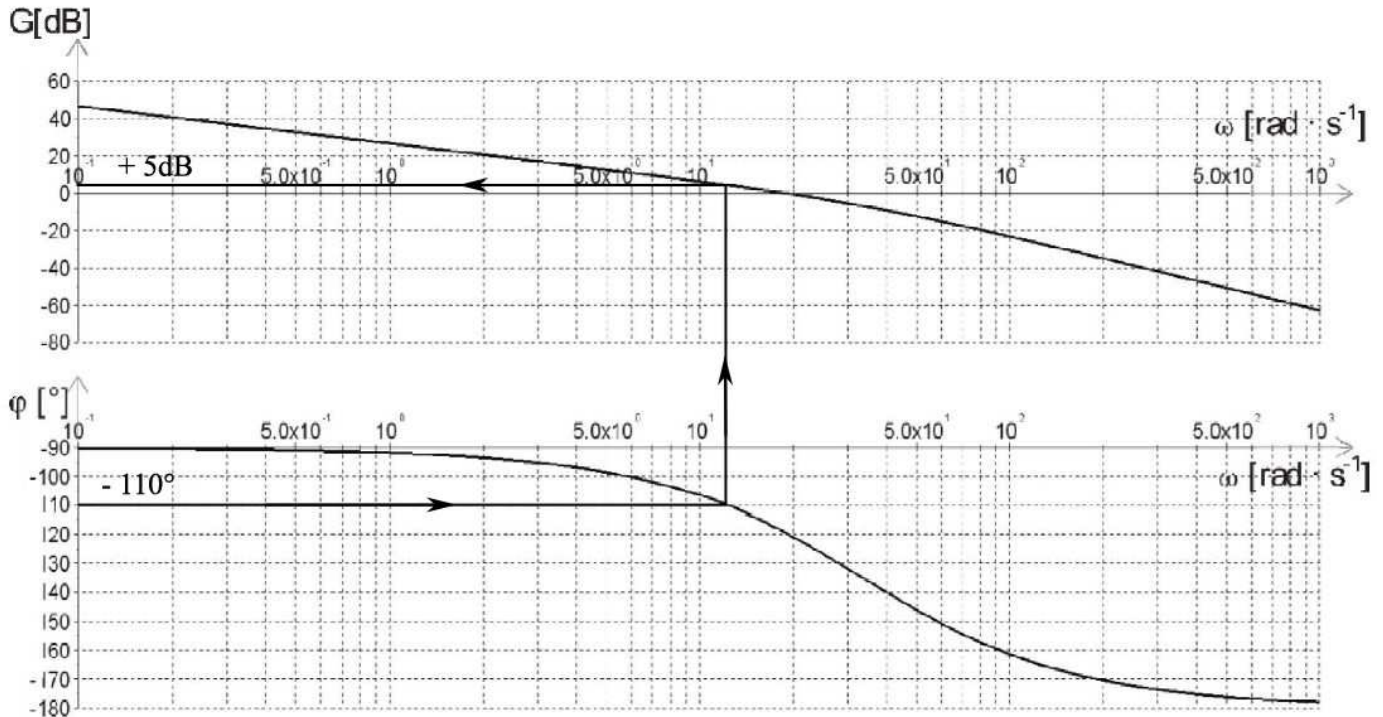
$$K_p > \frac{K_2 \cdot c_{r0}}{\varepsilon_{Smax}} = \frac{2,78 \cdot 10^{-2} \times 2,7 \cdot 10^{-3}}{1 \cdot 10^{-3}}$$

Soit :

$$K_p > 0,075$$

Question 29

Le document réponse nous montre qu'avec un gain $K_p = 1$ le gain dynamique de $H_{BO}(p)$ lorsque sa phase est de -110° est de $+5\text{dB}$. Voir tracé ci-dessous :



Or avec le gain $K_p = 0,075$ déterminé ci-dessus la courbe de gain sera translaté verticalement de $20 \cdot \log 0,075 = -22,5 \text{ dB}$. Quant à la courbe de phase elle ne sera pas modifiée.

Par conséquent, pour un gain $K_p = 0,075$ le gain dynamique de $H_{BO}(p)$ lorsque sa phase est de -110° sera de : $5 - 22,5 = -17,5 \text{ dB} < 0$.

Donc avec un gain $K_p = 0,075$, le critère de stabilité (Marge de phase $< 70^\circ$) sera vérifié.

Question 30

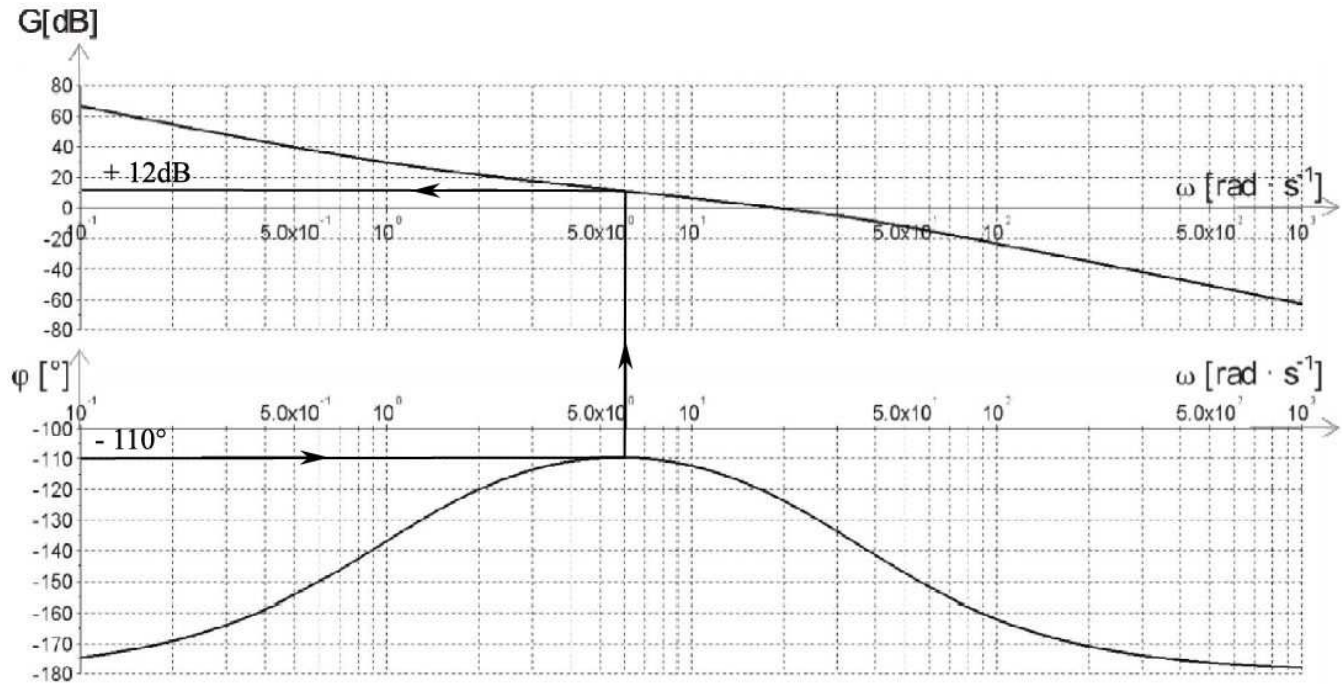
Ce correcteur permet, par son intégrateur, placé en amont de la perturbation, d'annuler l'erreur due à la perturbation.

En conservant sa stabilité grâce au rang 1 (terme en $1 + T_i \cdot p$).

Remarque :

Seul les 5/2 pouvaient répondre directement à cette partie de la question.

Le document réponse nous montre qu'avec un gain $K_p = 1$ le gain dynamique de $H_{BO}(p)$ lorsque sa phase est de -110° est de $+12\text{dB}$.



Donc pour vérifier le critère de stabilité, il faut traduire la courbe de gain dynamique de $H_{BO}(p)$ de -12 dB sans modifier la courbe de phase.

On choisit donc un gain de :

$$K_p = 10^{(-12/20)} = 0,25$$

Remarque :

Une résolution analytique donne un résultat différent :

$$-110^\circ = -90^\circ + \arctan(1 \cdot \omega_{0dB}) - 90^\circ - \arctan(3 \cdot 10^{-2} \cdot \omega_{0dB}) \Leftrightarrow \omega_{0dB} = 4,75 \text{ rad.s}^{-1}$$

$$20 \cdot \log K_p + 10 \cdot \log(1 + 1^2 \times 4,75^2) + 20 \cdot \log 856 - 20 \cdot \log 1 - 40 \cdot \log 4,75 - 10 \cdot \log(1 + (0,03 \times 4,75)^2) = 0$$

$$\Leftrightarrow 20 \cdot \log K_p = -45,2 \text{ dB} \quad \Leftrightarrow \quad K_p = 0,0055$$

Le diagramme de Bode de l'énoncé n'est donc pas cohérent avec les valeurs de la FTBO.

Question 31

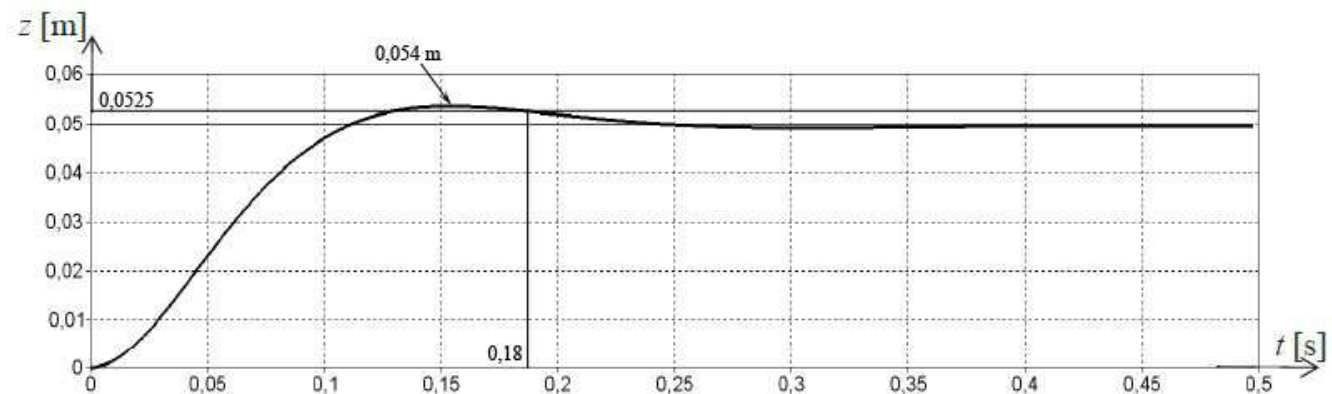


Figure 16 - Réponse à un échelon de position de 50 mm avec un correcteur PI

☞ La valeur en régime permanent vaut 50 mm, l'erreur statique est nulle le critère de précision est respecté.

☞ Le temps de réponse à 5% est d'environ 0,18 s inférieur à 0,2 s le critère de rapidité est respecté.

☞ Le premier dépassement est d'environ 0,004 m soit en pourcentage $\frac{0,004}{0,05} = 8\%$ inférieur à 10%. Le critère d'amortissement est donc vérifié.

Question 32

L'erreur due à la période d'échantillonnage correspond à la distance parcourue par l'aiguille durant cette durée $T_e = 10$ ms. En supposant que le moteur tourne à la vitesse de $N_{\max} = 4\,150$ tr/min, cette distance parcourue par l'aiguille est de :

$$\Delta Z_e = \frac{2 \cdot \pi \cdot N_{\max}}{60} \cdot k_r \cdot R_p \cdot T_e = \frac{2 \cdot \pi \times 4\,150}{60} \cdot \frac{10}{19,2} \cdot 0,01 = 2,26 \text{ mm}$$

L'erreur due à la conversion analogique numérique correspond à la distance parcourue par l'aiguille pour une impulsion du codeur incrémental. Cette distance parcourue par l'aiguille est :

$$\Delta Z_{AN} = \frac{2 \cdot \pi}{2\,000} \cdot k_r \cdot R_p = \frac{2 \cdot \pi \times 10}{2\,000 \times 19,2} = 1,6 \cdot 10^{-3} \text{ mm}$$

On en déduit l'erreur maximale de position : $\Delta Z_{\text{mes}} = \Delta Z_e + \Delta Z_{AN} = 2,26 \text{ mm}$

Remarque : l'erreur est principalement due à la période d'échantillonnage. L'erreur due à la conversion analogique numérique est négligeable.

Cette erreur de 2,26 mm n'est pas compatible avec l'exigence Id.2.3.1 du cahier des charges qui impose une précision de positionnement de l'aiguille inférieure à 1 mm

Question 33

La nouvelle procédure permet (après une première entrée de l'aiguille dans le liquide puis une sortie) une nouvelle entrée dans le liquide mais à une vitesse plus faible. Car la vitesse du moteur à la deuxième entrée dans le liquide est plus lente : $N_{\text{lent}} < N_{\max}$. Donc l'erreur due à la conversion analogique n'est pas modifiée mais celle due à la période d'échantillonnage est diminuée.

On en déduit de la même manière la nouvelle erreur maximale de position :

$$\Delta Z'_{\text{mes}} = \Delta Z'_e + \Delta Z_{AN} = \Delta Z_{AN} + \frac{2 \cdot \pi \cdot N_{\text{lent}}}{60} \cdot k_r \cdot R_p \cdot T_e = 1,6 \cdot 10^{-3} + \frac{2 \cdot \pi \times 1\,500}{60} \cdot \frac{10}{19,2} \cdot 0,01 = 0,803 \text{ mm}$$

Le flacon dans lequel est prélevé le liquide étant un cylindre de diamètre $D_f = 15$ mm, on en déduit l'erreur de volume correspondant :

$$\Delta V = \Delta Z'_{\text{mes}} \cdot \frac{\pi \cdot D_f^2}{4} = 0,803 \cdot \frac{\pi \times 15^2}{4} = 142 \text{ mm}^3 = 0,142 \text{ ml}$$

Question 34

Dans un premier temps on choisit un correcteur PI pour obtenir une précision de positionnement de l'aiguille sans erreur statique.

Dans un second temps, on utilise un moteur permettant d'avoir une vitesse d'approche rapide puis une vitesse de descente lente. Cela permet de déterminer plus précisément la position d'entrée de l'aiguille dans le liquide et donc de déterminer plus précisément la position de consigne de l'aiguille pour avoir un dosage en liquide précis.