

DM CI2**Téléphérique Vanoise Express****Corrigé****1- Moment d'inertie équivalent**

L'énergie cinétique du système S est la somme des énergies cinétique des différentes pièces :

Calculons l'énergie cinétique de chacun des éléments du système S :

- a- Moteurs : $E_C(2 \text{ Moteurs/Sol}) = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot J_m \cdot \omega_m^2(t)$
- b- Réducteurs : $E_C(2 \text{ Réducteur/Sol}) = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot J_r \cdot \omega^2(t)$ Avec : $\omega(t) = r \cdot \omega_m(t)$
- c- Poulie motrice : $E_C(\text{Poulie motrice/Sol}) = \frac{1}{2} \cdot J_{pm} \cdot \omega^2(t)$ Avec : $\omega(t) = r \cdot \omega_m(t)$
- d- Câble : $E_C(\text{Câble/Sol}) = \frac{1}{2} \cdot m \cdot V^2(t)$ Avec : $V(t) = \frac{D \cdot r}{2} \cdot \omega_m(t)$
- e- Cabine : $E_C(\text{Cabine/Sol}) = \frac{1}{2} \cdot M \cdot V^2(t)$ Avec : $V(t) = \frac{D \cdot r}{2} \cdot \omega_m(t)$
- f- Poulies de déviation : $E_C(5 \text{ Poul. Dév./Sol}) = \frac{5}{2} \cdot J_{pd} \cdot \omega_{pd}^2(t)$ Avec : $\omega_{pd}(t) = \frac{2 \cdot V(t)}{d} = \frac{2}{d} \cdot \frac{D \cdot r}{2} \cdot \omega_m(t)$
- g- Poulies porteuses : $E_C(50 \text{ Poul. Port/Sol}) = \frac{50}{2} \cdot J_{pp} \cdot \omega_{pp}^2(t)$ Avec : $\omega_{pp}(t) = \frac{2 \cdot V(t)}{d_p} = \frac{2}{d_p} \cdot \frac{D \cdot r}{2} \cdot \omega_m(t)$

L'énergie cinétique du système S est la somme des énergies cinétique des différentes pièces. On obtient donc l'énergie cinétique de l'ensemble des pièces en mouvement : $E_C(S/\text{sol}) = \frac{1}{2} \cdot J_{eq} \cdot \omega_m^2$

Avec : $J_{eq} = 2 \cdot J_m + (2 \cdot J_r + J_{pm}) \cdot r^2 + (m + M) \cdot \left(\frac{D \cdot r}{2}\right)^2 + 5 \cdot J_{pd} \cdot \left(\frac{D \cdot r}{d}\right)^2 + 50 \cdot J_{pp} \cdot \left(\frac{D \cdot r}{d_p}\right)^2$

2- Théorème de l'énergie cinétique

Les actions extérieures appliquées sur E l'ensemble des pièces en mouvement sont :

- ☞ Les actions des liaisons pivot avec le milieu extérieur
- ☞ Le couple exercé par chacun des deux moteurs
- ☞ L'action du vent sur la cabine
- ☞ Le poids des pièces.
- ☞ Le frottement visqueux du chariot sur le câble.

Les liaisons pivot des solides du système avec le milieu étant parfaites et avec des pièces fixes par rapport au sol, les puissances de ces actions sont nulles.

La puissance des deux moteurs est : $P(\text{moteurs} \rightarrow E/R_0) = 2 \cdot C_m \cdot \omega_m$

La cabine est en translation donc la puissance de l'action du vent sur la cabine est :

$$P(\text{Vent} \rightarrow \text{Cabine/Sol}) = - F_{\text{vent}} \cdot \vec{x} \cdot \vec{v} \cdot \vec{x}_1 = - F_{\text{vent}} \cdot \frac{D \cdot r}{2} \cdot \cos \gamma \cdot \omega_m$$

La cabine est en translation donc la puissance du poids de la cabine est :

$$P(\text{Pes.} \rightarrow \text{Cabine/Sol}) = - M \cdot g \cdot \vec{y} \cdot \vec{v} \cdot \vec{x}_1 = - M \cdot g \cdot v \cdot \cos \left(\frac{\pi}{2} - \gamma\right) = - M \cdot g \cdot \frac{D \cdot r}{2} \cdot \sin \gamma \cdot \omega_m$$

La cabine est en translation donc la puissance du roulement sans glissement est :

$$P(\text{RsG} \rightarrow \text{Cabine/Sol}) = - b \cdot v \cdot \vec{x}_1 \cdot \vec{v} \cdot \vec{x}_1 = - b \cdot \left(\frac{D \cdot r}{2}\right)^2 \cdot \omega_m^2$$

D'où la somme des puissances extérieures s'appliquant sur l'ensemble E dans son mouvement par rapport au sol est : $P(\text{Ext} \rightarrow E/\text{Sol}) = 2 \cdot C_m \cdot \omega_m - (F_{\text{vent}} \cdot \cos \gamma + M \cdot g \cdot \sin \gamma) \cdot \frac{D \cdot r}{2} \cdot \omega_m - b \cdot \left(\frac{D \cdot r}{2}\right)^2 \cdot \omega_m^2$

Par ailleurs les autres liaisons étant parfaites, les puissances de ces actions intérieures sont nulles :

$$P(\text{Int} \rightarrow \text{E/Sol}) = 0$$

Le théorème de l'énergie cinétique : $\frac{d E_C(\text{S/sol})}{dt} = P(\text{Ext} \rightarrow \text{E/Sol}) + P(\text{Int} \rightarrow \text{E/Sol})$, s'écrit donc :

$$J_{eq} \cdot \omega_m \cdot \frac{d \omega_m(t)}{dt} = 2 \cdot c_m \cdot \omega_m - (F_{vent} \cdot \cos \gamma + M \cdot g \cdot \sin \gamma) \cdot \frac{D \cdot r}{2} \cdot \omega_m - b \cdot \left(\frac{D \cdot r}{2}\right)^2 \cdot \omega_m^2$$

Soit : $2 \cdot c_m(t) - c_r(t) = J_{eq} \cdot \frac{d \omega_m(t)}{dt} + f \cdot \omega_m(t)$ Avec :

$$f = b \cdot \left(\frac{D \cdot r}{2}\right)^2 \quad c_r(t) = (F_{vent} \cdot \cos \gamma + M \cdot g \cdot \sin \gamma) \cdot \frac{D \cdot r}{2}$$

3- Schéma bloc du moteur

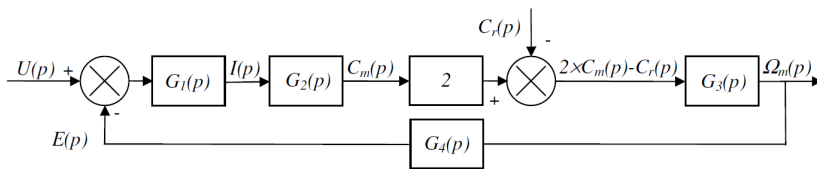
En passant l'équation différentielle précédente et les équations différentielles électromécaniques du moteur on obtient :

$$\begin{aligned} \mathbf{E(p)} &= \mathbf{K_E \cdot \Omega_m(p)} & \mathbf{C_m(p)} &= \mathbf{K_C \cdot I(p)} \\ U(p) &= E(t) + R \cdot I(p) + L \cdot p \cdot I(p) & 2 \cdot C_m(p) - C_r(p) &= J_{eq} \cdot p \cdot \Omega_m(p) + f \cdot \Omega_m(p) \end{aligned}$$

Soit encore : $\mathbf{I(p)} = \frac{1}{\mathbf{R + L \cdot p}} \cdot (\mathbf{U(p)} - \mathbf{E(p)})$ $\mathbf{\Omega_m(p)} = \frac{1}{\mathbf{f + J_{eq} \cdot p}} \cdot (\mathbf{2 \cdot C_m(p)} - \mathbf{C_r(p)})$

Du schéma bloc ci-dessous on en déduit :

$$\mathbf{G_2(p)} = \mathbf{K_C} \quad \mathbf{G_4(p)} = \mathbf{K_E}$$



$$\mathbf{G_1(p)} = \frac{1}{\mathbf{R + L \cdot p}}$$

$$\mathbf{G_3(p)} = \frac{1}{\mathbf{f + J_{eq} \cdot p}}$$

4- Fonctions de transfert du moteur

Du schéma bloc avec le principe de superposition on en déduit :

$$\Omega_m(p) = \frac{G_1(p) \cdot G_2(p) \cdot 2 \cdot G_3(p)}{1 + G_1(p) \cdot G_2(p) \cdot 2 \cdot G_3(p) \cdot G_4(p)} \cdot U(p) - \frac{G_3(p)}{1 + G_1(p) \cdot G_2(p) \cdot 2 \cdot G_3(p) \cdot G_4(p)} \cdot C_r(p)$$

Etant donné les expressions de $G_1(p)$, $G_2(p)$, $G_3(p)$ et $G_4(p)$ on obtient :

$$\Omega_m(p) = \frac{\frac{2 \cdot K_C}{(R + L \cdot p) \cdot (f + J_{eq} \cdot p)}}{1 + \frac{2 \cdot K_C \cdot K_E}{(R + L \cdot p) \cdot (f + J_{eq} \cdot p)}} \cdot U(p) - \frac{\frac{1}{f + J_{eq} \cdot p}}{1 + \frac{2 \cdot K_C \cdot K_E}{(R + L \cdot p) \cdot (f + J_{eq} \cdot p)}} \cdot C_r(p)$$

Après calcul et mise sous forme canonique on obtient : $\Omega_m(p) = F_1(p) \cdot U(p) - F_2(p) \cdot C_r(p)$ Avec :

$$F_1(p) = \frac{\frac{2 \cdot K_C}{2 \cdot K_C K_E + R \cdot f}}{1 + \frac{R \cdot J_{eq} + L \cdot f}{2 \cdot K_C K_E + R \cdot f} \cdot p + \frac{L \cdot J_{eq}}{2 \cdot K_C K_E + R \cdot f} \cdot p^2}$$

$$F_2(p) = \frac{\frac{R \cdot \left(1 + \frac{L}{R} \cdot p\right)}{2 \cdot K_C K_E + R \cdot f}}{1 + \frac{R \cdot J_{eq} + L \cdot f}{2 \cdot K_C K_E + R \cdot f} \cdot p + \frac{L \cdot J_{eq}}{2 \cdot K_C K_E + R \cdot f} \cdot p^2}$$

5- Identification des constantes f et J_{eq}

La réponse du moteur à un échelon de tension (pour $c_r(t) = 0$) est celle d'un premier ordre donc la fonction de transfert $F_1(p)$ est un premier ordre d'où $\frac{L \cdot J_{eq}}{2 \cdot K_C K_E + R \cdot f}$ est négligeable. On néglige donc L

Donc
$$F_1(p) \approx \frac{\frac{2 \cdot K_C}{2 \cdot K_C K_E + R \cdot f}}{1 + \frac{R \cdot J_{eq}}{2 \cdot K_C K_E + R \cdot f} \cdot p} = \frac{K_m}{1 + \tau_m \cdot p}$$
 Avec :

$$\begin{cases} K_m = \frac{2 \cdot K_C}{2 \cdot K_C K_E + R \cdot f} \\ \tau_m = \frac{R \cdot J_{eq}}{2 \cdot K_C K_E + R \cdot f} \end{cases}$$

Par la réponse à de $F_1(p)$ à un échelon de tension de 100 V on obtient :

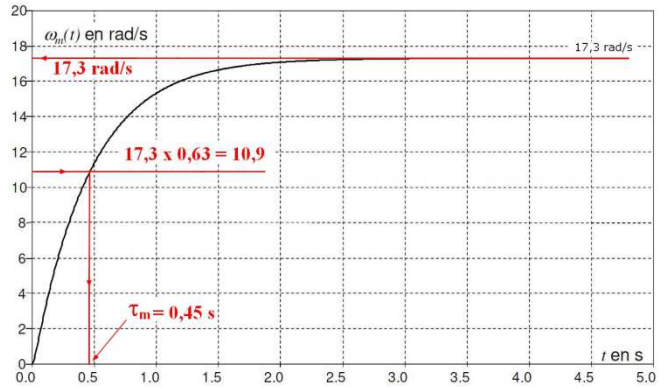
$$K_m = \frac{2.K_C}{2.K_C K_E + R.f} = \frac{17,3}{100} = 0,173 \text{ rad.s}^{-1} . \text{V}^{-1}$$

et :
$$\tau_m = \frac{R.J_{eq}}{2.K_C K_E + R.f} = 0,45 \text{ s}$$

On obtient donc :

$$f = \frac{1}{R} \cdot (2.K_C - 2.K_C \cdot K_E) = 6,1 \text{ N.m.s.rad}^{-1}$$

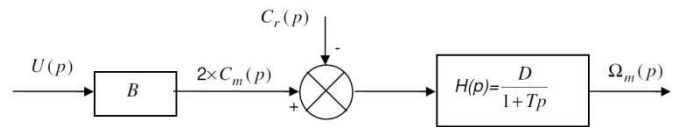
$$J_{eq} = \frac{0,45}{R} \cdot (2.K_C \cdot K_E + R.f) = 776 \text{ kg.m}^2$$



6- Schéma bloc simplifié du moteur

Du schéma bloc ci-contre on en déduit :

$$F_1(p) = \frac{B.D}{1 + T.p} = \frac{K_m}{1 + \tau_m.p}$$

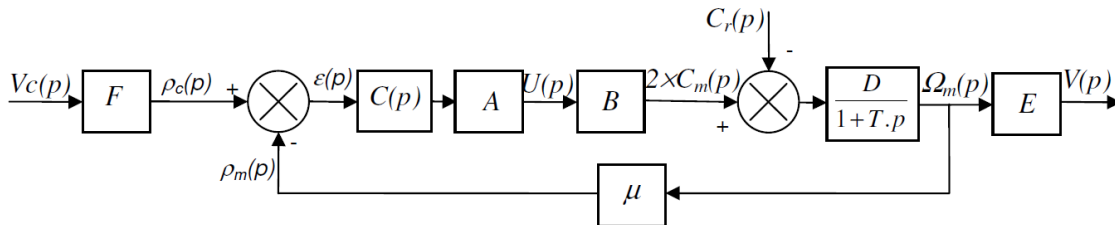


$$F_2(p) = \frac{D}{1 + T.p} = \frac{R}{2.K_C K_E + R.f}$$

On a donc : $T = \tau_m = 0,45 \text{ s}$ et : $B.D = 0,173 \text{ rad.s}^{-1} . \text{V}^{-1}$

Soit : $D = \frac{R}{2.K_C K_E + R.f} = 5,8 \cdot 10^{-4} \text{ rad.s}^{-1} . \text{N}^{-1} . \text{m}^{-1}$ $B = \frac{K_m}{D} = \frac{0,173}{5,8} = 298 \text{ N.m.V}^{-1}$

Le schéma bloc de l'asservissement est :



7- Gain E

De ce schéma bloc on a : $E = \frac{V(p)}{\Omega_m(p)} = \frac{D.r}{2} = 0,1 \text{ m}$

8- Gain F

De ce schéma bloc on en déduit que pour que $v_c(t) = v(t)$ entraîne $\epsilon(t) = 0$, il faut :

$$F = \frac{\mu}{E} = 7,16 \text{ V.s.m}^{-1}$$