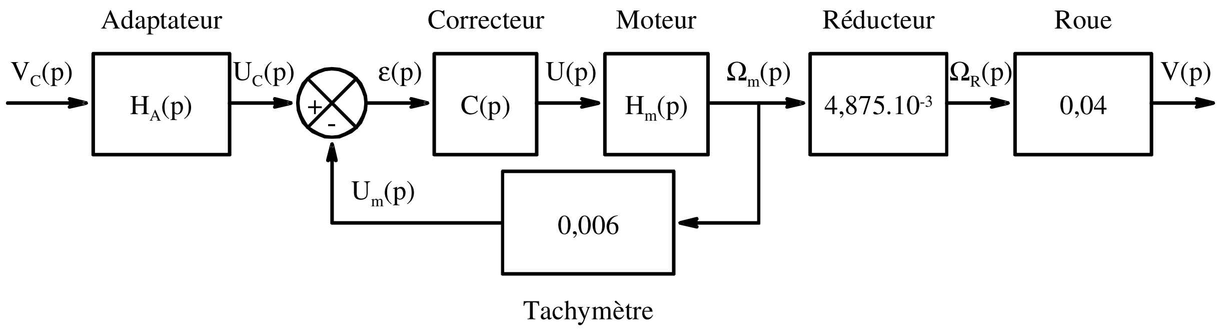
Chariot filoguidé : Corrigé

1.1- Schéma bloc



Remarques: ☞ La roue roulant sans glisser sur le sol : $v(t) = R_{roue}.\omega_R(t)$ où R_{roue} est le rayon de la roue. Le gain de la roue est donc égal à son rayon.

1.2- Gain de l'adaptateur

Ayant $\varepsilon(t) = u_C(t) - u_m(p)$ on a : $\varepsilon(t) = 0$ pour $v(t) = v_C(t)$ $\Leftrightarrow$ $\varepsilon(t) = 0$ pour $v(t) = v_C(t)$

Soit : $\dfrac{U_C(p)}{V_C(p)} = \dfrac{U_m(p)}{V(p)} = \dfrac{U_m(p)}{\Omega_m(p)} \cdot \dfrac{\Omega_m(p)}{\Omega_R(p)} \cdot \dfrac{\Omega_R(p)}{V(p)}$ On en déduit que le gain de l'adaptateur est de :

$$\mathbf{K_A = \frac{6.10^{-3}}{4{,}875.10^{-3} \times 0{,}04} = 30{,}77\ V.s.m^{-1}}$$

2.1- Détermination de la fonction de transfert expérimentale

A partir de la réponse à un échelon de tension de 12 V on en déduit :

☞ La tangente à l'origine est horizontale et il n'y a pas de dépassement de la valeur finale. La fonction de transfert est donc un second ordre de facteur d'amortissement supérieur ou égal à 1. S'écrivant sous la forme : $H_{Exp}(p) = \dfrac{K}{(1 + \tau_1.p).(1 + \tau_2.p)}$

☞ La valeur finale de la sortie $u_m(t)$ est de 4,8 V pour une entrée u(t) de 12V. D'où le gain $K = \dfrac{4{,}8}{12} = 0{,}4$.

☞ Les 63% de la valeur finale ($0{,}63 \times 4{,}8 = 3{,}02$) sont obtenus à la date $\tau_1 + \tau_2 = 0{,}05$ s. Les 86% de la valeur finale ($0{,}86 \times 4{,}8 = 4{,}13$) sont obtenus à la date $2.\tau_1 + \tau_2 = 0{,}095$ s. On en déduit :

$\tau_1 = 0{,}095 - 0{,}05 = 0{,}045$ s et : $\tau_2 = 0{,}05 - 0{,}045 = 0{,}005$ s

On en déduit : $\mathbf{H_{Exp}(p) = \dfrac{0{,}4}{(1 + 0{,}045.p).(1 + 0{,}005.p)}}$

2.2- Fonction de transfert du moteur

$H_{Exp}(p) = \dfrac{U_m(p)}{U(p)} = \dfrac{U_m(p)}{\Omega_m(p)} \cdot \dfrac{\Omega_m(p)}{U(p)} = 0{,}006.H_m(p)$ Soit $H_m(p) = \dfrac{H_{Exp}(p)}{0{,}006}$

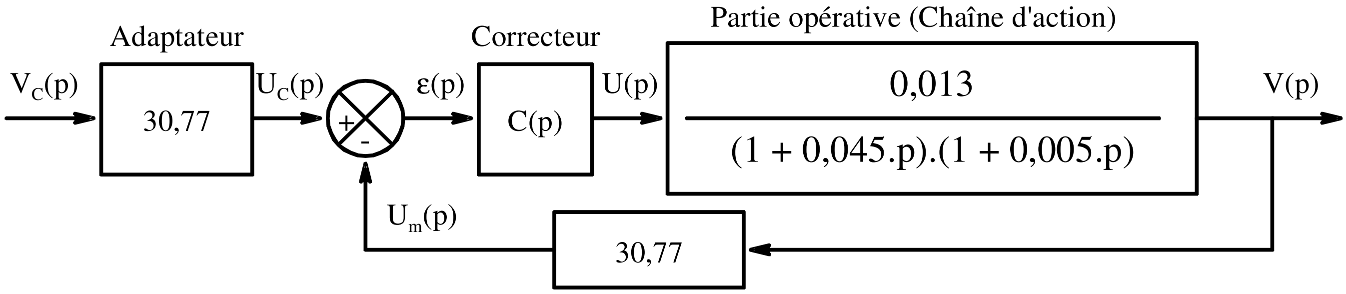
On en déduit : $\mathbf{H_m(p) = \dfrac{66{,}7}{(1 + 0{,}045.p).(1 + 0{,}005.p)}}$

3- Simplification de la modélisation

La partie opérative est la succession du moteur du réducteur et de la roue. Sa fonction de transfert est donc le produit de ces trois fonctions de transfert. Dont le gain est $66{,}7 \times 4{,}875.10^{-3} \times 0{,}04 = 0{,}013$.

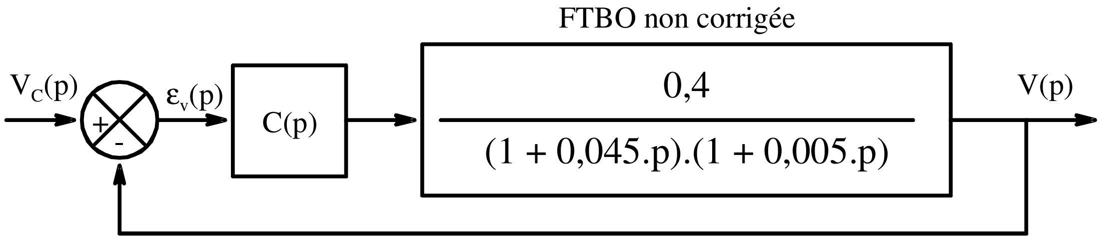
Quant au gain de la boucle de retour : $\dfrac{U_m(p)}{V(p)} = \dfrac{U_m(p)}{\Omega_m(p)} \cdot \dfrac{\Omega_m(p)}{\Omega_R(p)} \cdot \dfrac{\Omega_R(p)}{V(p)} = \dfrac{6.10^{-3}}{4{,}875.10^{-3} \times 0{,}04} = 30{,}77$.

D'où le schéma bloc ci-dessous équivalent au schéma bloc de l'asservissement :



D'autre part les deux gains avant le comparateur étant identiques, il est possible de les remplacer par un seul bloc (de même gain) après le comparateur. Qui peut être placé après celui du correcteur. La FTBO non corrigée a donc un gain de $30{,}77 \times 0{,}013 = 0{,}4$

D'où le schéma bloc ci-dessous équivalent au schéma bloc de l'asservissement :



4.1- FTBF de l'asservissement avec un correcteur proportionnel

Avec un correcteur proportionnel (gain pur K_p) on obtient la FTBO : $\dfrac{0{,}4.K_p}{(1+0{,}045.p).(1+0{,}005.p)}$

on en déduit la FTBF de l'asservissement : $H_{BF1}(p) = \dfrac{V(p)}{V_C(p)} = \dfrac{\dfrac{0{,}4.K_p}{(1+0{,}045.p).(1+0{,}005.p)}}{1+\dfrac{0{,}4.K_p}{(1+0{,}045.p).(1+0{,}005.p)}}$

$$H_{BF1}(p) = \frac{0{,}4.K_p}{(1+0{,}045.p).(1+0{,}005.p)+0{,}4.K} = \frac{0{,}4.K_P}{1+0{,}4.K_P+5.10^{-2}.p+2{,}25.10^{-4}.p^2}$$

Soit sous sa forme canonique : $\mathbf{H_{BF1}(p) = \dfrac{0{,}4.K_P}{1+0{,}4.K_P} \times \dfrac{1}{1+\dfrac{5.10^{-2}}{1+0{,}4.K_P}.p+\dfrac{2{,}25.10^{-4}}{1+0{,}4.K_P}.p^2}}$

4.2- Minimisation du temps de réonse à 5% : $t_{5\%}$

On en déduit les expressions en fonction de K_p des paramètres caractéristiques de la FTBF :

Le gain : $K = \dfrac{0{,}4.K_P}{1+0{,}4.K_P}$ La pulsation propre : $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{1+0{,}4.K_P}{2{,}25.10^{-4}}}$

Le facteur d'amortissement : $\xi = \dfrac{5.10^{-2}}{2.(1+0{,}4.K_P)} \times \sqrt{\dfrac{1+0{,}4.K_P}{2{,}25.10^{-4}}} = \dfrac{1{,}67}{\sqrt{1+0{,}4.K_P}}$

Or pour avoir le temps de réponse minimal il faut : $\xi = 0{,}69 = \dfrac{1{,}67}{\sqrt{1+0{,}4.K_P}}$

Soit après calcul, le temps de réponse minimal est obtenu pour : $\mathbf{K_p = 12{,}1}$

On a pour cette valeur de K_p : $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{1+0{,}4\times 12{,}1}{2{,}25.10^{-4}}} = 161\ \text{rad.s}^{-1}$

Or d'après l'abaque pour $\xi = 0{,}69$, $\omega_0.t_{5\%} = 3$

On en déduit pour $K_p = 12{,}9$ un temps de réponse minimal de $t_{5\%} = \dfrac{3}{161}$ Soit $t_{5\%} \approx 0{,}02$ s

4.3- Annulation du dépassement

Pour éviter le dépassement de la valeur finale il faut : $\xi \geq 1$, soit : $\dfrac{1{,}67}{\sqrt{1 + 0{,}4.K_P}} \geq 1$

Soit après calcul, la condition pour éviter le dépassement est : **$K_p \leq 4{,}5$**

On a pour cette valeur de $K_p = 4{,}5$: $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{1 + 0{,}4 \times 4{,}5}{2{,}25.10^{-4}}} = 112 \text{ rad.s}^{-1}$

Or d'après l'abaque pour $\xi = 1$, $\omega_0.t_{5\%} = 4{,}8$

D'où un temps de réponse minimal sans dépassement de $t_{5\%} = \dfrac{4{,}8}{112}$ Soit $t_{5\%} \approx 0{,}043$ s

4.4- Limitation de l'erreur statique

Le gain statique de le FTBF est : $K = \dfrac{0{,}4.K_P}{1 + 0{,}4.K_P}$

D'où l'erreur statique indicielle : $\varepsilon_S = 1 - K = 1 - \dfrac{0{,}4.K_P}{1 + 0{,}4.K_P} = \dfrac{1}{1 + 0{,}4.K_P}$

La condition sur le gain K_P du correcteur permettant d'obtenir une erreur indicielle inférieure à 5%. est donc de : $\dfrac{1}{1 + 0{,}4.K_P} \leq 0{,}05$ Soit : **$K_P \geq 47{,}5$**

4.5- Conclusion

Pour éviter le dépassement de la valeur finale en réponse à un échelon de consigne il faut avec le correcteur proportionnel un gain inférieur à 4,5 (Avec un temps de réponse de 0,043 s pour $K_p = 4{,}5$). Or pour limmiter l'erreur statique à 5% il faut un gain K_p supérieur ou égal à 47,5.

Donc le correcteur proportionnel ne permet pas de concilier une bonne stabilité (pas de dépassement de la valeur finale) et une bonne précision (Erreur indicielle limitée à 5%).

5.1- Constante du correcteur PI

La fonction de transfert du correcteur est : $C(p) = K_P + \dfrac{K_I}{p} = \dfrac{K_I + K_P.p}{p} = K_I \dfrac{1 + (K_P/K_I).p}{p}$

On en déduit : **$C(p) = K_C.\dfrac{1 + \tau_C.p}{p}$** **Avec : $K_C = K_I$ et : $\tau_C = \dfrac{K_P}{K_I}$**

5.2- FTBF avec le correcteur PI

L'expression de la FTBO non corrigée est : $\dfrac{0{,}4}{(1 + 0{,}045.p).(1 + 0{,}005.p)}$ donc pour compenser la plus grande constante de temps de cette FTBO il faut : **$\tau_C = 0{,}045$ s**

Avec cette valeur de τ_C l'expression de la FTBO corrigée est alors : **$H_{BO}(p) = \dfrac{0{,}4.K_C}{p.(1 + 0{,}005.p)}$**

Et donc une FTBF : $H_{BF2}(p) = \dfrac{H_{BO}(p)}{1 + H_{BO}(p)} = \dfrac{\dfrac{0{,}4.K_C}{p.(1 + 0.005.p)}}{1 + \dfrac{0{,}4.K_C}{p.(1 + 0.005.p)}} = \dfrac{0{,}4.K_C}{0{,}4.K_C + p + 0{,}005.p^2}$

Donc sous sa forme canonique cette FTBF s'écrit : **$H_{BF2}(p) = \dfrac{1}{1 + \dfrac{1}{0{,}4.K_P}.p + \dfrac{0{,}0125}{K_p}.p^2}$**

5.3- Annulation du dépassement de la valeur finale

On en déduit les expressions en fonction de K_C des paramètres caractéristiques de la FTBF :

Le gain : $K = 1$ La pulsation propre : $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{K_P}{0{,}0125}}$

Le facteur d'amortissement : $\xi = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{0{,}4.K_p}\sqrt{\dfrac{K_P}{0{,}0125}} = \dfrac{1}{\sqrt{8.10^{-3}.K_P}}$

Pour éviter le dépassement de la valeur finale il faut : $\xi \geq 1$, soit : $\dfrac{1}{\sqrt{8.10^{-3}.K_P}} \geq 1$

Soit après calcul, la condition pour éviter le dépassement est : $\mathbf{K_C \leq 125\ s^{-1}}$

On a pour cette valeur de $K_C = 125$: $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{125}{0{,}0125}} = 100\ rad.s^{-1}$

Or d'après l'abaque pour $\xi = 1$, $\omega_0.t_{5\%} = 4{,}8$

D'où un temps de réponse minimal sans dépassement de $t_{5\%} = \dfrac{4{,}8}{100}$ Soit : $\mathbf{t_{5\%} \approx 0{,}048\ s}$

Le gain statique de la FTBF étant de 1 l'erreur statique est nulle : $\boldsymbol{\varepsilon_S = 0}$

Enfin on a pour le correcteur :
- ☞ Un gain intégral de : $\mathbf{K_I = K_C = 125\ s^{-1}}$
- ☞ Un gain proportionnel de : $\mathbf{K_p = \tau_C.K_I = 5{,}63}$

5.4- Conclusion

Avec un correcteur PI ainsi dimensionné on a donc un asservissement :

- ☞ Précis car l'erreur statique est nulle.
- ☞ Stable ne présentant pas de dépassement de la valeur finale.
- ☞ Dont le temps de réponse à 5% est de 0,048 s.

Ce correcteur PI permet donc de concilier des exigences de Précision, Stabilité et Rapidité.