FTBO & FTBF - Démonstrations

1- Précision d'un asservissement sans perturbation

1.1- Fonction de transfert en boucle fermé

$$\mathbf{FTBO(p) = \frac{K_{BO}}{p^{\alpha}} \cdot \frac{N(p)}{D(p)}}$$

avec :
- K_{BO} : le gain statique
- α : La classe de F(p) = nombre d'intégrateurs de la boucle ouverte
- N(p) et D(p) des polynômes en p de coefficient constant 1
- $D(p) = 1 + b_1.p + \ldots + b_d.p^d \quad N(p) = 1 + a_1.p + \ldots + a_n.p^n$

D'où la FTBF : $H(p) = \dfrac{FTBO(p)}{1 + FTBO(p)} = \dfrac{\frac{K_{BO}}{p^{\alpha}} \cdot \frac{N(p)}{D(p)}}{1 + \frac{K_{BO}}{p^{\alpha}} \cdot \frac{N(p)}{D(p)}}$ $\qquad \mathbf{H(p) = \dfrac{K_{BO}.\frac{N(p)}{D(p)}}{p^{\alpha} + K_{BO}.\frac{N(p)}{D(p)}}}$

1.2- Erreur de l'asservissement

On en déduit donc l'erreur : $\varepsilon_{er}(p) = E(p) - S(p) = E(p)\left(1 - H(p)\right)$

$$\varepsilon_{er}(p) = E(p).\left(1 - \frac{K_{BO}.\frac{N(p)}{D(p)}}{p^{\alpha} + K_{BO}.\frac{N(p)}{D(p)}}\right) = E(p).\frac{p^{\alpha} + K_{BO}.\frac{N(p)}{D(p)} - K_{BO}.\frac{N(p)}{D(p)}}{p^{\alpha} + K_{BO}.\frac{N(p)}{D(p)}} = E(p).\frac{p^{\alpha}}{p^{\alpha} + K_{BO}.\frac{N(p)}{D(p)}}$$

Or Le théorème de la valeur finale donne : $\lim\limits_{t\to\infty} \varepsilon_{er}(t) = \lim\limits_{p\to 0} p.\varepsilon_{er}(p)$

Par conséquent l'erreur de cette asservissement est : $\varepsilon_{er} = \lim\limits_{p\to 0} E(p) . \dfrac{p^{\alpha+1}}{p^{\alpha} + K_{BO}.\frac{N(p)}{D(p)}}$

Or : $\lim\limits_{p\to 0} \dfrac{N(p)}{D(p)} = 1$, D'où l'erreur de cette asservissement : $\boldsymbol{\varepsilon_{er} = \lim\limits_{p\to 0} E(p) . \dfrac{p^{\alpha+1}}{p^{\alpha} + K_{BO}}}$

1.3- Consigne en échelon d'amplitude E_0 :

L'entrée est de la forme $e(t) = E_0.Y(t)$ soit: $E(p) = \dfrac{E_0}{p}$ Donc : $\boldsymbol{\varepsilon_{er} = \lim\limits_{p\to 0} \dfrac{E_0.p^{\alpha}}{p^{\alpha} + K_{BO}}}$

☞ **Une classe α nulle (FTBO sans intégrateur) :** $\boldsymbol{\varepsilon_S = \dfrac{E_0}{1 + K_{BO}}}$

☞ **Une classe α > 0 (FTBO avec au moins un intégrateur) :** $\boldsymbol{\varepsilon_S = 0}$

1.4- Consigne en rampe de pente v

L'entrée est de la forme $e(t) = v.t.Y(t)$ soit: $E(p) = \dfrac{v}{p^2}$ Donc : $\boldsymbol{\varepsilon_{er} = \lim\limits_{p\to 0} \dfrac{v.p^{\alpha-1}}{p^{\alpha} + K_{BO}}}$

Or : $\lim\limits_{p\to 0} \dfrac{N(p)}{D(p)} = 1$, Par conséquent l'erreur due à une entrée en rampe de pente v est de :

☞ **Une classe α nulle (FTBO sans intégrateur) :** $\boldsymbol{\varepsilon_t = \infty}$

☞ **Une classe α = 1 (FTBO avec un intégrateur) :** $\boldsymbol{\varepsilon_t = \dfrac{v}{K_{BO}}}$

☞ **Une classe α > 1 (FTBO avec plusieurs intégrateurs) :** $\boldsymbol{\varepsilon_t = 0}$

1.5- Consigne en parabole d'accélération a

L'entrée est de la forme $e(t) = a.t^2.Y(t)$ soit: $E(p) = \frac{2.a}{p^3}$ Donc : $\boldsymbol{\varepsilon_{er} = \lim_{p\to 0} \frac{a.p^{\alpha-2}}{p^{\alpha} + K_{BO}.\frac{N(p)}{D(p)}}}$

Or : $\lim_{p\to 0} \frac{N(p)}{D(p)} = 1$, Par conséquent l'erreur due à une parabole d'accélération a est de :

☞ **Une classe $\alpha = 0$ ou 1 (FTBO avec un ou aucun intégrateur) :** $\boldsymbol{\varepsilon_t = \infty}$

☞ **Une classe $\alpha = 2$ (FTBO avec deux intégrateurs) :** $\boldsymbol{\varepsilon_t = \frac{2.a}{K_{BO}}}$

2- Précision d'un asservissement avec perturbation

2.1- Fonction de transfert en boucle fermé

$$\mathbf{F_1(p) = \frac{K_1}{p^{\alpha 1}} \cdot \frac{N_1(p)}{D_1(p)}} \quad \text{et :} \quad \mathbf{F_2(p) = \frac{K_2}{p^{\alpha 2}} \cdot \frac{N_2(p)}{D_2(p)}}$$

avec : $N_1(p)$, $N_2(p)$, $D_1(p)$ et $D_2(p)$ des polynômes en p de coefficient constant égale à 1

Le principe de superposition permet d'écrire : $\mathbf{S(p) = E(p).H_1(p) + P_e(p).H_2(p)}$ avec :

$$H_1(p) = \frac{K_1.K_2\frac{N_1(p).N_2(p)}{D_1(p).D_2(p)}}{p^{\alpha 1+\alpha 2} + K_1.K_2.\frac{N_1(p).N_2(p)}{D_1(p).D_2(p)}} \qquad H_2(p) = \frac{-p^{\alpha 1}.K_2\frac{N_2(p)}{D_2(p)}}{p^{\alpha 1+\alpha 2} + K_1.K_2.\frac{N_1(p).N_2(p)}{D_1(p).D_2(p)}}$$

2.2- Erreur due à la perturbation

Erreur due à la perturbation : $\varepsilon_P = \lim_{p\to 0} p.\left(0 - S(p)\right) = \lim_{p\to 0} p.P_e(p).\frac{p^{\alpha 1}.K_2\frac{N_2(p)}{D_2(p)}}{p^{\alpha 1+\alpha 2} + K_1.K_2.\frac{N_1(p).N_2(p)}{D_1(p).D_2(p)}}$

Donc pour un échelon P_{e0} $\left(P_e(p) = \frac{P_{e0}}{p}\right)$ de perturbation : $\boldsymbol{\varepsilon_P = \lim_{p\to 0} \frac{P_{e0}.p^{\alpha 1}.K_2}{p^{\alpha 1+\alpha 2} + K_1.K_2.}}$

2.3- Erreur de l'asservissement pour un échelon de perturbation

☞ **Cas où il n'y a pas d'intégrateur en amont de la perturbation : $\alpha_1 = 0$**

⇒ Si il n'y a pas d'intégrateur en aval de la perturbation : $\alpha_2 = 0$ (Dans ce cas il n'y a aucun intégrateur dans la boucle ouverte). On a alors :

$$\varepsilon_P = \lim_{p\to 0} \frac{P_{e0}.K_2}{1 + K_1.K_2.} \qquad \boldsymbol{\varepsilon_P = \frac{P_{e0}.K_2}{1 + K_1.K_2.}}$$

⇒ Si il y a au moins 1 intégrateur en aval de la perturbation : $\alpha_2 \geq 1$

$$\varepsilon_P = \lim_{p\to 0} \frac{P_{e0}.K_2}{p^{\alpha 2} + K_1.K_2.} = \frac{P_{e0}.K_2}{K_1.K_2.} \qquad \boldsymbol{\varepsilon_P = \frac{P_{e0}}{K_1}}$$

☞ **Cas où il n'y a au moins un intégrateur en amont de la perturbation : $\alpha_1 \geq 1$ ($\forall\ \alpha_2 \geq 0$)**

$$\boldsymbol{\varepsilon_P = \lim_{p\to 0} \frac{P_{e0}.p^{\alpha 1}.K_2}{p^{\alpha 1+\alpha 2} + K_1.K_2.}} \qquad \boldsymbol{\varepsilon_P = 0}$$