

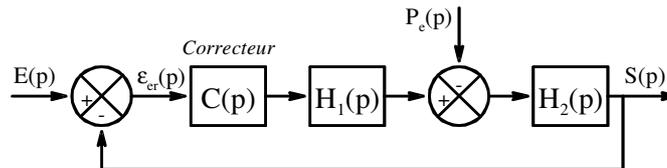
# Propriétés de la FTBO et performances de la FTBF

## 1- Simplification des schémas blocs

### 1.1- Objectif de la simplification

Lorsque l'on a un asservissement décrit par un schéma bloc, il est souvent préférable de simplifier au mieux ce schéma bloc afin de le réduire à une seule boucle avec un retour unitaire. Comme sur le schéma bloc ci-dessous. Ce schéma bloc fait alors apparaître :

- ☞ La fonction de transfert du correcteur en général notée :
- ☞ La fonction de transfert en amont de la perturbation. Ici notée :
- ☞ La fonction de transfert en aval de la perturbation. Ici notée :



La Fonction de Transfert en Boucle Ouverte :  $G(p) = C(p) \cdot H_1(p) \cdot H_2(p)$  est la fonction de transfert de la sortie du comparateur au retour à ce même comparateur. Ici :

La Fonction de Transfert en Boucle ouverte non corrigée :  $G_0(p) = H_1(p) \cdot H_2(p)$  est la FTBO sans le correcteur. C'est-à-dire la FTBO pour une fonction de transfert du correcteur  $C(p) = 1$

L'objectif est cependant d'étudier ou de prévoir les performances de la Fonction de Transfert en Boucle Fermée :  $G_c(p) = \frac{G(p)}{1 + G(p)}$  qui sont celles de l'asservissement. Ici :

Bien sur la formule de Black permet d'établir que :

Une manière de prévoir les performances de la FTBF (ou de les modifier) est de calculer cette FTBF en fonction des constantes du correcteur puis de prévoir (ou modifier) ses performances en fonction de ces constantes. Cependant, cela limite beaucoup les possibilités et en fait impose quasiment à ne choisir pour le correcteur qu'un seul paramètre et à la condition que la FTBF soit une fonction de transfert bien connue, soit en générale un premier ou un second ordre simple. Cette méthode limite donc les possibilités de dimensionner un correcteur afin de répondre aux différents critères du cahier des charges.

Une autre méthode, beaucoup plus performante consiste à établir les liens entre les propriétés de la FTBO et les performances de la FTBF.

La FTBO étant uniquement le produit de la Fonction de Transfert du Correcteur et la FTBO non corrigée :  $G(p) = C(p) \cdot G_0(p)$  il sera beaucoup plus facile de prévoir (ou modifier) les performances de la FTBF.

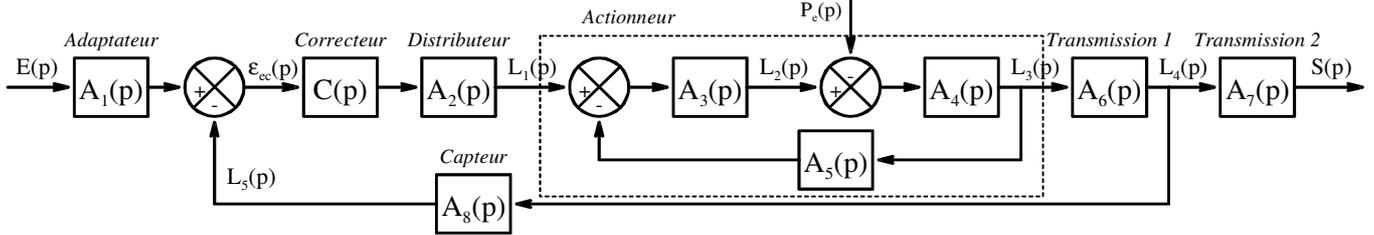
Ce cours a donc pour objectif de :

- ☞
- ☞

Nous verrons entre autre que toutes les performances d'un asservissement (ou au minimum les valeurs approchées de celles-ci) peuvent être prédites par les diagrammes de Bode de la FTBO.

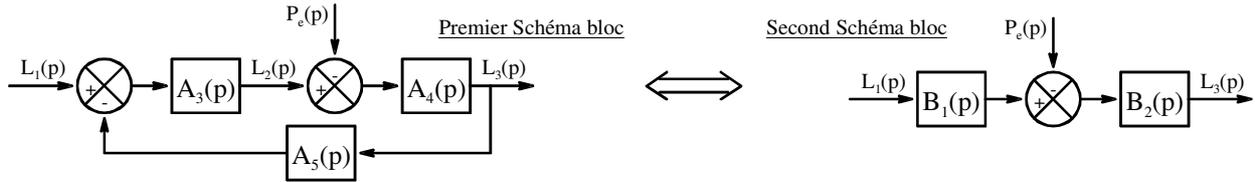
**1.2- Exemple de simplification sur un cas classique de structure d'asservissement**

Soit l'asservissement décrit par le schéma bloc ci-dessous :



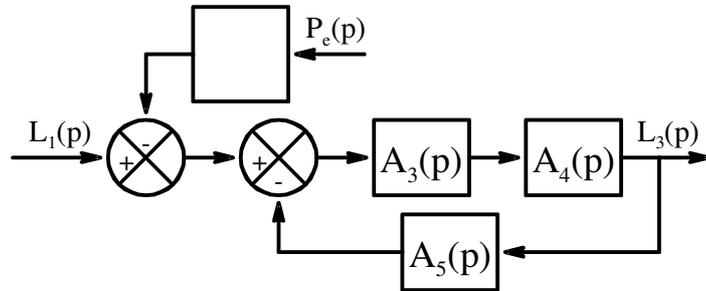
**1.2.1- Réduction de la boucle interne**

L'objectif est ici de réduire le schéma bloc à uniquement deux blocs entre lesquels la perturbation agit directement en venant s'additionner ou se soustraire. (ici se soustraire). On a donc :



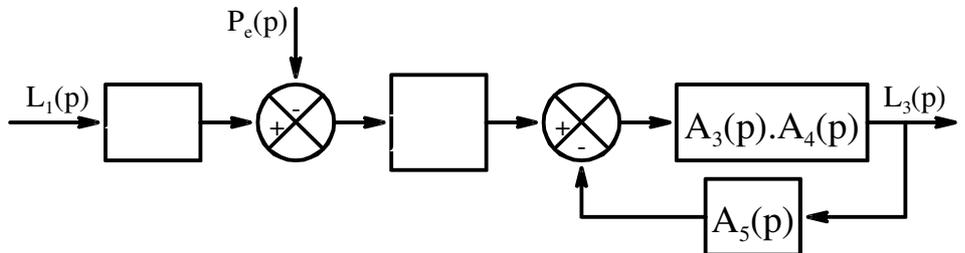
**A- Méthode par modification du 1<sup>ier</sup> schéma bloc pour aller vers le second :**

Dans un 1<sup>er</sup> temps on déplace le comparateur qui est au centre de la boucle en amont de la boucle.



Le schéma bloc est alors équivalent à :

Puis on déplace le nouveau bloc sur la chaîne directe.



Le schéma bloc est alors équivalent à :

On obtient donc :

et :

**B- Méthode par le principe de superposition :**

Le principe de superposition nous permet d'écrire :  $L_3(p) = H_1(p).L_1(p) + H_2(p).P_e(p)$  avec :

Pour le premier schéma bloc :

Pour le second schéma bloc :

$$H_1(p) = \left( \frac{L_3(p)}{L_1(p)} \right)_{P_e(p)=0} =$$

$$H_1(p) = \left( \frac{L_3(p)}{L_1(p)} \right)_{P_e(p)=0} =$$

$$H_2(p) = \left( \frac{L_3(p)}{P_e(p)} \right)_{L_1(p)=0} =$$

$$H_2(p) = \left( \frac{L_3(p)}{P_e(p)} \right)_{L_1(p)=0} =$$

D'où :

**C- Méthode par la lecture du schéma bloc :**

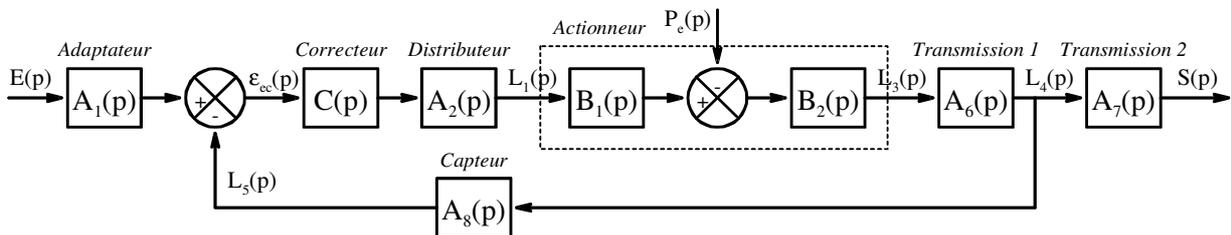
Le principe de superposition nous permet d'écrire :  $L_3(p) = H_1(p).L_1(p) + H_2(p).P_e(p)$  avec pour le 2<sup>nd</sup> schéma bloc :  **$H_1(p) = B_1(p).B_2(p)$**   **$H_2(p) = -B_2(p)$**  et par lecture du 1<sup>ier</sup> schéma bloc :

Ensuite par calcul :  $L_3(p) = A_4(p).A_3(p).L_1(p) - A_4(p).A_3(p).A_5(p).L_3(p) - A_4(p).P_e(p)$   
 $L_3(p).[1 + A_3(p).A_4(p).A_5(p)] = A_3(p).A_4(p).L_1(p) - A_4(p).P_e(p)$   
 Et donc :  $L_3(p) = \frac{A_3(p).A_4(p)}{1 + A_3(p).A_4(p).A_5(p)}.L_1(p) - \frac{A_4(p)}{1 + A_3(p).A_4(p).A_5(p)}.P_e(p)$

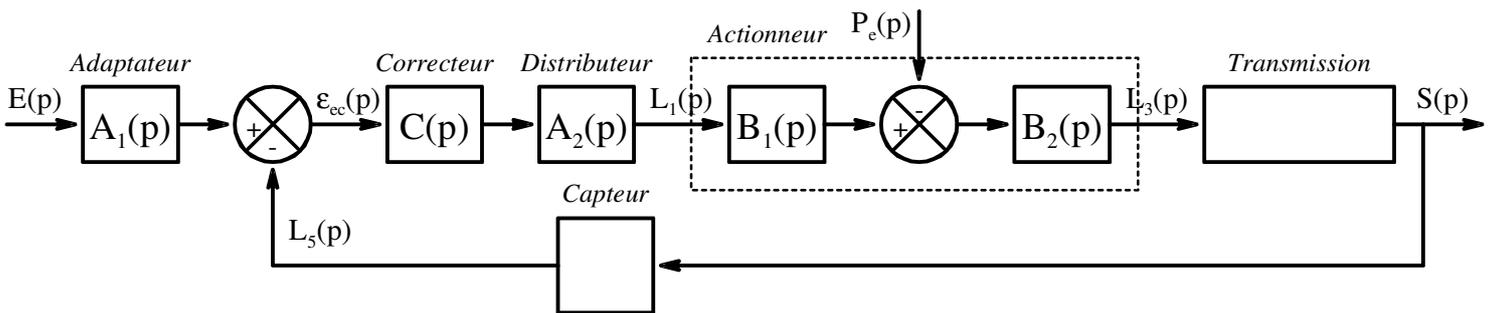
D'où par identification :

**1.2.2- Retour unitaire**

Reste ensuite à réduire le schéma bloc ci-dessous



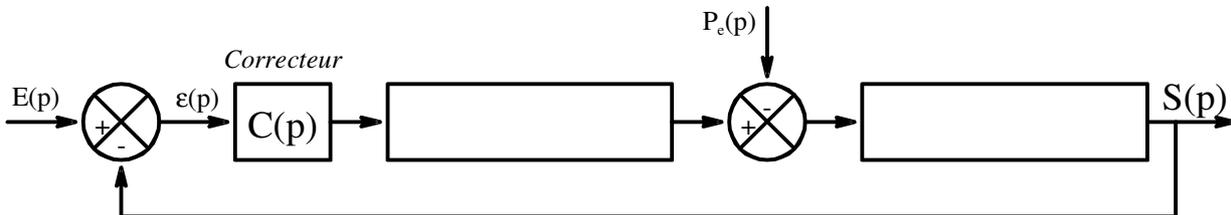
On commence par déplacer le repiquage du capteur sur la réponse (tout à droite) on obtient alors :



En général, la boucle de retour est un gain pur :  $\frac{A_8(p)}{A_7(p)} = C^{te}$ . Et on a un fonctionnement normale de

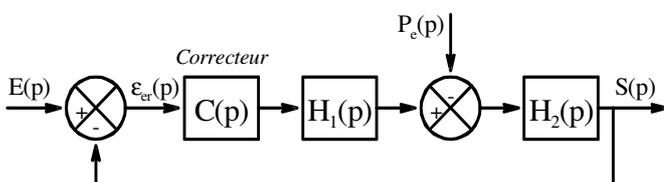
l'asservissement :  $\epsilon_{EC}(p) = 0$  pour  $S(p) = E(p)$  on obtient dans ce cas :

Le schéma bloc de l'asservissement est alors équivalent au schéma bloc à retour unitaire :



**1.2.3- Synthèse**

D'où le schéma bloc avec un retour unitaire : Avec la FTBO de cet asservissement :



Les fonctions de transfert par rapport à la perturbation :





**2.1.1- Erreur due à la perturbation**

On montre alors qu'on a pour la FTBF une erreur due uniquement à la perturbation (Pour  $e(t) = 0$ ) :  $\epsilon_{erP}(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} (0 - s(t))$  qui varie suivant :

- ☞ Le type de perturbation : Echelon : (On n'étudiera que ce cas la)
- ☞ La classe (ou le nombre d'intégrateur) en amont ( $\alpha_1$ ) et en aval ( $\alpha_2$ ) de la perturbation
- ☞ Les gains statiques en amont ( $K_1$ ) et en aval ( $K_2$ ) de la perturbation

Voir démonstrations. On retiendra le tableau synthétisant cela :

$\epsilon_{erP}(t)$	Nombre d'intégrateur en aval de la perturbation	
Nombre d'intégrateur en amont de la perturbation	$\alpha_2 = 0$	$\alpha_2 = 1$
$\alpha_1 = 0$		
$\alpha_1 = 1$		

**Remarque :**

Dans ce cours les cas où la perturbation n'est pas une constante ne sont pas étudiés. Dans ces cas il faut en revenir au calcul de la FTBF puis appliquer le théorème de la valeur finale.

**2.1.2- Erreur totale : due à l'entrée et à la perturbation**

Considérons pour un asservissement :

- ☞ La consigne :  $e(t)$
- ☞ La réponse due à la consigne seule :  $s_C(t)$
- ☞ La réponse due perturbation seule  $s_P(t)$

On a les erreurs dues à :

- ☞ à la consigne seule :  $\epsilon_{erC} = \lim_{t \rightarrow \infty} (e(t) - s_C(t))$
- ☞ à la perturbation seule :  $\epsilon_{erP} = \lim_{t \rightarrow \infty} (0 - s_P(t))$

Ainsi que l'erreur totale due à la superposition de la consigne et de la perturbation :

$$\epsilon_{erT} = \lim_{t \rightarrow \infty} (e(t) - s(t))$$

Du principe de superposition on peut écrire :  $s(t) = s_C(t) + s_P(t)$

Soit : 
$$\epsilon_{erT} = \lim_{t \rightarrow \infty} (e(t) - (s_C(t) + s_P(t)))$$

Ou encore : 
$$\epsilon_{erT} = \lim_{t \rightarrow \infty} (e(t) - s_C(t)) + \lim_{t \rightarrow \infty} (0 - s_P(t))$$

Du principe de superposition on en déduit donc que l'erreur totale due à la consigne et à la perturbation s'écrit :

### 3- Condition graphique de stabilité

#### 3.1- Diagrammes de Black

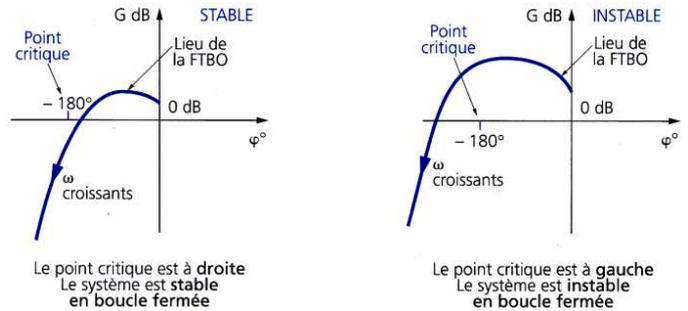
Le diagramme de Black d'une fonction de transfert est un diagramme permettant de présenter l'analyse fréquentielle de la fonction de transfert. **Il est hors programme en CPGE mais est intéressant pour présenter le critère du revers.** Il représente le lieu dans le plan de Black (Phase en Abscisse et Gain dynamique en Ordonnée) des point A dont les abscisses et l'ordonnées sont définies par :

$$\overline{OA} = \left| \begin{matrix} \arg(H(j.\omega)) \\ 20.\log(|H(j.\omega)|) \end{matrix} \right| \quad \text{pour } \omega \in [0,+\infty] :$$

#### 4.2- Critère du revers dans Black

On démontre, en utilisant le théorème de Cauchy dans le plan complexe (Hors programme en mathématiques en CPGE), que la condition fondamentale vue précédemment se traduit par la règle suivante :

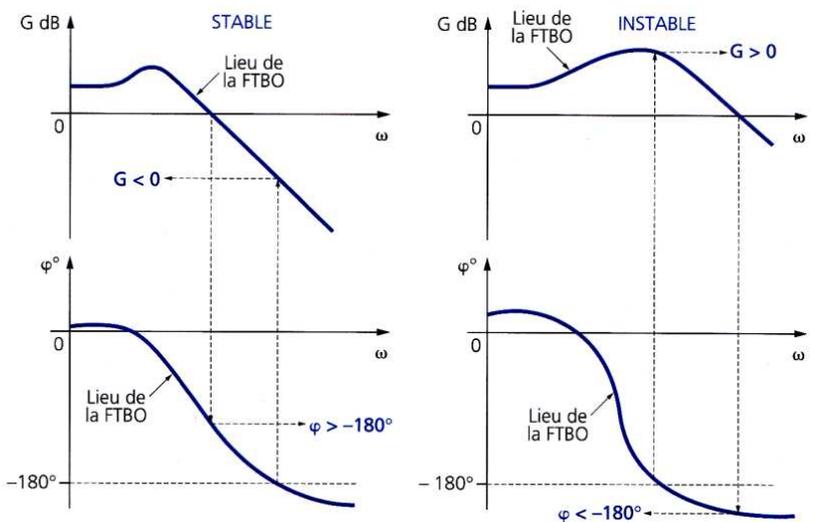
Un système asservi linéaire (FTBF) est stable si la FTBO est stable et, dans le plan de Black, en décrivant le lieu de la FTBO pour des pulsations  $\omega$  croissantes, on laisse le point critique  $(-1)$  de coordonnées  $(-180,0)$  à droite du lieu.



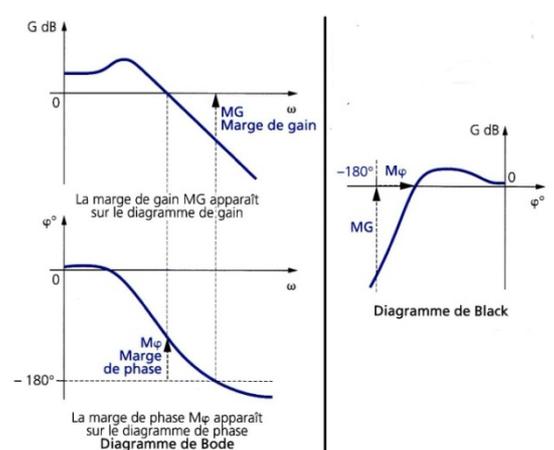
#### 4.2- Critère du revers dans le diagramme de Bode

Le critère du revers dans Bode s'énonce de manière simplifiée de la manière suivante :

##### Lecture graphique sur le diagramme de Bode



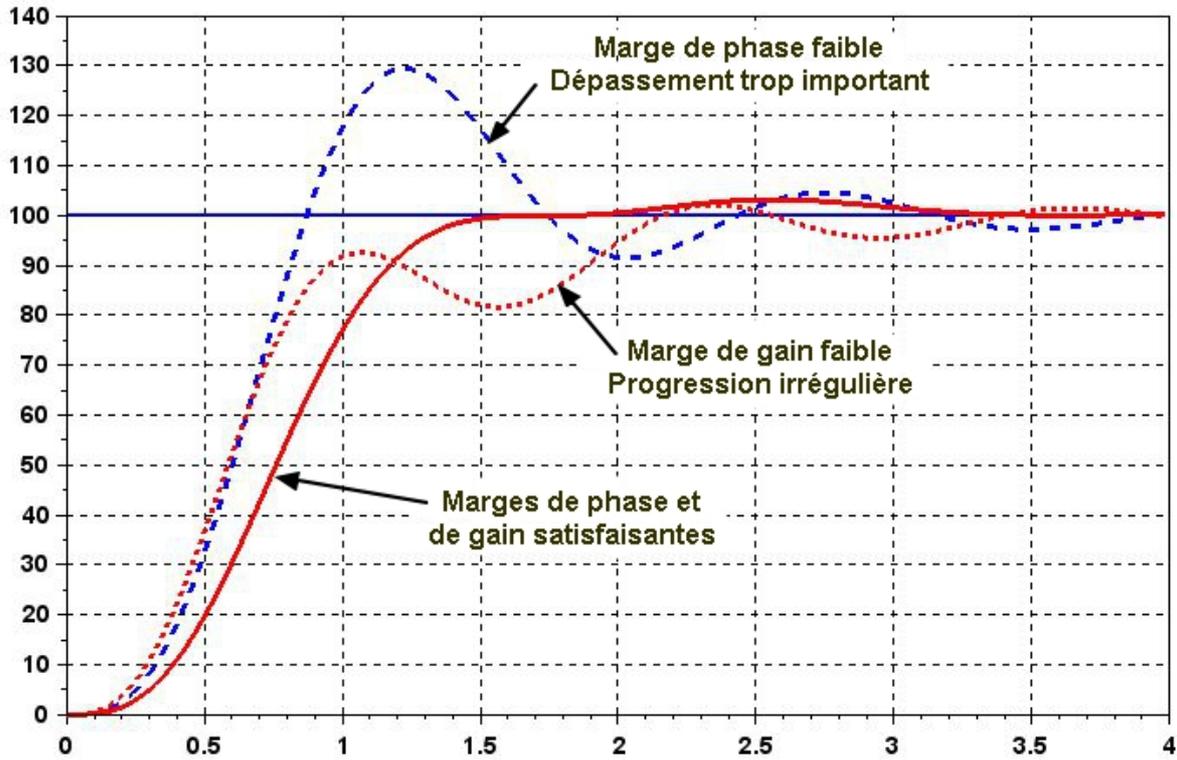
##### Marges de stabilité



### 4.3 -Marges de la FTBO et allure de la réponse temporelle de la FTBF

Les marges de gain et de phase sont des indicateurs de la stabilité. Il y a des liens entre ces deux marges (déterminée sur la FTBO) et la réponse temporelle de la FTBF.

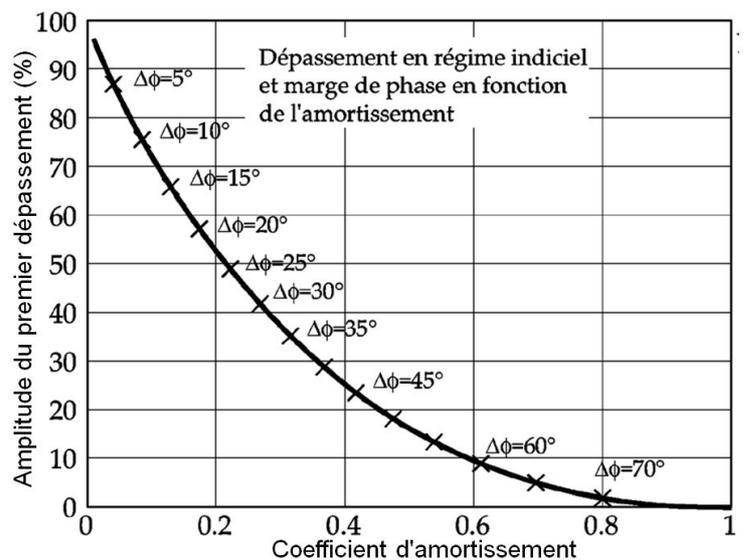
- ☞ Si une de ces deux marges (déterminées sur la FTBO) est négative alors la FTBF est instable
- ☞ Si la marge de phase (déterminée sur la FTBO) est trop faible la réponse temporelle de la FTBF présentera un dépassement de la valeur finale important.
- ☞ Si la marge de gain (déterminée sur la FTBO) est trop faible la réponse temporelle de la FTBF présentera une progression vers la valeur finale irrégulière.



La régularité de la réponse temporelle est difficile voir impossible à quantifier.

Le dépassement de la valeur finale  $D\%$  lui est mesurable. En revanche il est difficile d'établir un lien clair entre le dépassement relatif  $D\%$  de la réponse de la FTBF et la marge de phase  $M_\phi$  déterminée sur la FTBO. Sauf pour le second ordre où ce lien peut être établi.

On ne le démontrera pas mais Le graphe ci-contre donne une estimation de la marge de phase en fonction du coefficient d'amortissement et de la marge de phase.



#### Valeurs usuelles des marges de stabilité

Marges de gain : Souvent on prend une marge de phase comprise

Marges de gain : Souvent on prend une marge de gain comprise

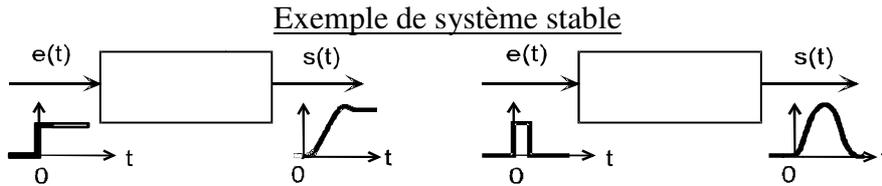
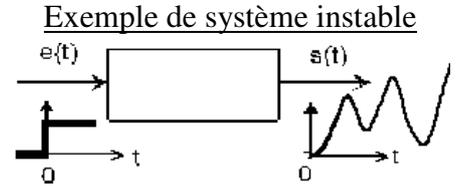
Quoiqu'il en soit en concours les critères de stabilité sur les marges de phase et de gain sont systématiquement donnés par le cahier des charges.

## 5- Condition fondamentale de stabilité : Critère algébrique

### 5.1- Définition de la stabilité

Remarque :

Un système est stable si la réponse libre du système tend vers zéro à l'infini. La réponse libre étant la réponse à une entrée tendant vers 0 à l'infini : Comme par exemple une impulsion telle l'impulsion de Dirac.

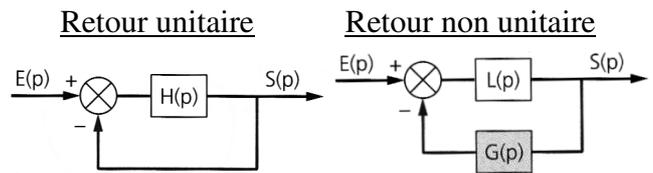


Etudier la réponse libre d'un système, revient à écarter le système de sa position d'équilibre (Par exemple par une entrée de type impulsion et à analyser sa réponse. Ce système est :

- ☞ Stable si il a tendance à revenir dans sa position d'équilibre.
- ☞ Instable si il a tendance à s'en écarter.
- ☞ Juste stable ou oscillant si il ne revient pas dans sa position d'équilibre mais ne s'en écarte pas.

### 5.2- Equation caractéristique et pôles d'un système linéaire

On a montré (voir cours sur la précision des asservissements) que tout asservissement avec un fonctionnement normal peut se ramener à un schéma bloc à retour unitaire ou non unitaire. (voir schémas blocs ci-contre)



On en déduit que la fonction de transfert en boucle fermée de l'asservissement : FTBF(p) peut s'écrire en fonction de la fonction de transfert en boucle ouverte : FTBO(p) :

$$FTBF(p) = \frac{FTBO(p)}{1 + FTBO(p)}$$

soit si on a :  $FTBO(p) = \frac{K_{BO} \cdot N_{BO}(p)}{p^\alpha \cdot D_{BO}(p)}$

$$FTBF(p) = \frac{\frac{K_{BO} \cdot N_{BO}(p)}{p^\alpha \cdot D_{BO}(p)}}{1 + \frac{K_{BO} \cdot N_{BO}(p)}{p^\alpha \cdot D_{BO}(p)}}$$

Soit :

$$FTBF(p) = \frac{K_{BO} \cdot N_{BO}(p)}{p^\alpha \cdot D_{BO}(p) + K_{BO} \cdot N_{BO}(p)}$$

or :  $p^\alpha \cdot D_{BO}(p) + K_{BO} \cdot N_{BO}(p) = 0 \iff 1 + FTBO(p) = 0$       Donc :

Remarque : Pour un asservissement il n'y a pas de pôles nuls car il faudrait  $K_{BO} = 0$

**5.3- Réponse du système à une impulsion de Dirac : E(p) = 1**

Soit une FTBF ayant des pôles réels (n<sub>s</sub> pôles simples p<sub>si</sub>, n<sub>m</sub> pôles multiples p<sub>mi</sub> de degré k<sub>mi</sub>) et n<sub>c</sub> pôles complexes conjugués : p<sub>c</sub> = a ± b.j.

On en déduit que le dénominateur D(p) de la FTBF s'écrit :

$$D_{BF}(p) = \frac{\prod_{i=1}^{n_s} (p - p_{si}) \cdot \prod_{i=1}^{n_m} (p - p_{mi})^{k_{mi}} \cdot \prod_{i=1}^{n_c} [(p - a_i)^2 + b_i^2]}{\prod_{i=1}^{n_s} |p_{si}| \cdot \prod_{i=1}^{n_m} |p_{mi}|^{k_{mi}} \cdot \prod_{i=1}^{n_c} |p_{ci}|}$$

Dans ce cas la réponse du système à une impulsion de Dirac en entrée E(p) = 1 est : S(p) = H<sub>BF</sub>(p)

On montre alors (C'est la décomposition en éléments simples) que pour N(p) = K cette fonction symbolique de la sortie peut s'écrire sous la forme d'une somme :

$$S(p) = \sum_{i=1}^{n_s} \frac{K_{1i}}{p - p_{si}} + \sum_{i=1}^{n_m} \frac{K_{2i}}{(p - p_{mi})^{k_{mi}}} + \sum_{i=1}^{n_c} \frac{K_{3i}}{(p - a_i)^2 + b_i^2}$$

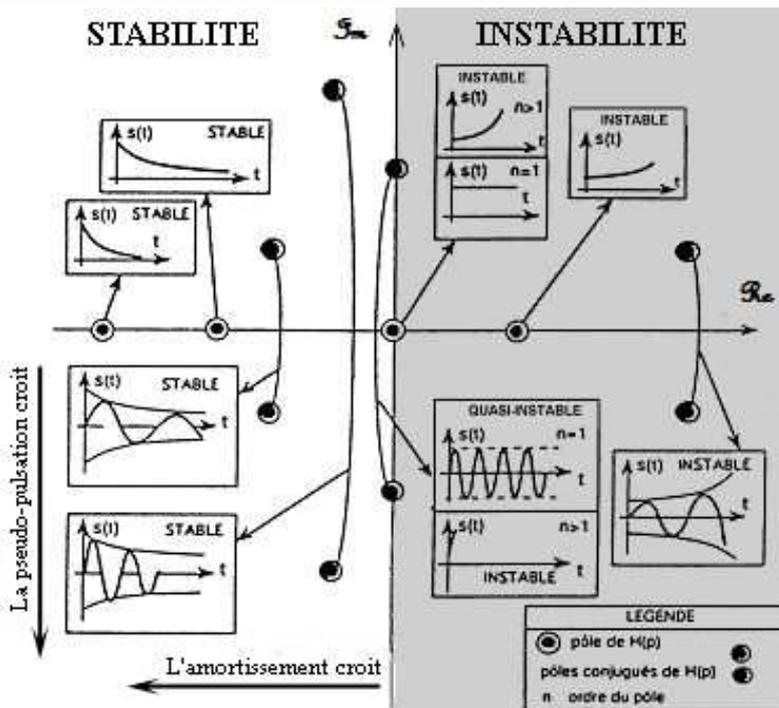
Par la transformée inverse de S(p) on obtient donc la réponse temporelle à une impulsion de Dirac :

Remarque : Dans le cas où N<sub>BO</sub>(p) n'est pas une constante, on a une réponse similaire avec des polynômes en t en lieu et place des constantes K<sub>1i</sub>, K<sub>2i</sub> et K<sub>4i</sub>.

**5.4- Condition fondamentale de stabilité**

Le système est stable si pour une impulsion de Dirac la réponse s(t) → 0 pour t → ∞. Il est donc stable si les différentes valeurs des p<sub>si</sub>, p<sub>mi</sub> et a<sub>i</sub> sont négatives.

**5.5- Comportement et position des pôles de la FTBF dans le plan complexe**



Cas particulier 1 :

Un système présentant un certain nombre de pôles complexes à partie réelle nulle est un système juste oscillant (ou système marginalement stable ou quasi-instable).

Cas particulier 2 :

Un système « intégrateur pur » ( FTBF(p) = 1/p ) est un système instable car une entrée en échelon conduit à une sortie en rampe.

Cependant en aucun cas il ne peut s'agir de la FTBF d'un asservissement.

**5.6- Modes de fonctionnement et pôles dominants**

On appelle mode de fonctionnement le comportement du système associée soit à un pôle réel soit à une paire de pôles complexes conjugués. Les modes de comportement correspondent évidemment aux différents termes de la réponse impulsionnelle du système dont la réponse est :

$$s(t) = \sum_{i=1}^{n_s} K_{1i} \cdot e^{p_{si} \cdot t} + \sum_{i=1}^{n_m} K_{2i} \cdot \frac{t^{k_{mi}-1}}{(k_{mi}-1)!} \cdot e^{p_{mi} \cdot t} + \sum_{i=1}^{n_c} K_{3i} \cdot e^{a_i \cdot t} \cdot \sin(b_i \cdot t)$$

Pour un système stable (parties réelles des pôles négatives) plus les parties réelles sont proches de 0 plus la convergence due à l'amortissement est lente et donc plus le système a un comportement proche de ces modes. Donc :

**5.7- Approximation du fonctionnement du système par les modes dominants**

On appelle modes dominants les modes de fonctionnement associés aux pôles dominants.

L'expression de la fonction de transfert peut donc être approximée par une fonction de transfert dont le dénominateur est défini par les seuls pôles dominants.

Donc si on a un système avec une FTBF avec un numérateur  $K_{BF} \cdot N_{BF}(p)$ ,  $n_s$  pôles réels simples  $p_{si}$  et  $n_c$  pôles complexes  $p_{ci} = a_i + b_i \cdot j$  à parties réelles négatives alors, elle s'écrit :

$$FTBF(p) = \frac{K_{BF} \cdot N_{BF}(p) \prod_{i=1}^{n_s} |p_{si}| \cdot \prod_{i=1}^{n_c} (a_i^2 + b_i^2)}{\prod_{i=1}^{n_s} (p - p_{si}) \cdot \prod_{i=1}^{n_c} [(p - a_i)^2 + b_i^2]}$$

Cette fonction peut s'écrire sous sa forme canonique :

Elle peut être approximée par la fonction de transfert correspondant au mode dominant :

**Exemple :**

Soit un système dont la FTBF est :  $H_{BF}(p) = \frac{1}{1 + 5,35 \cdot p + 1,775 \cdot p^2 + 0,125 \cdot p^3}$

Les pôles de cette FTBF sont :

La FTBF peut alors être approximée par :

## 6- Rapidité de la FTBF et Pulsation de coupure de la FTBO

### 6.1- Temps d'établissement

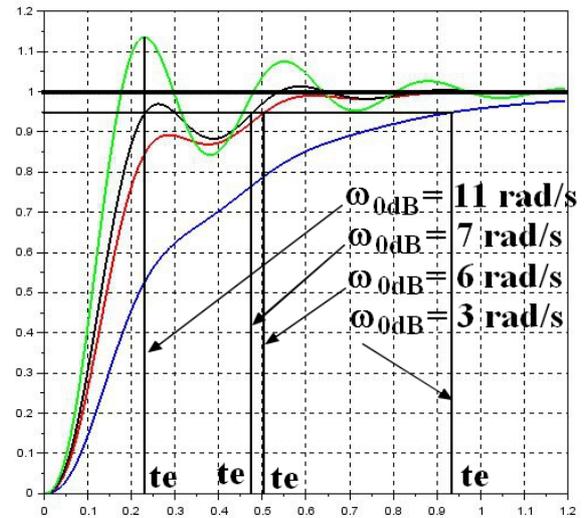
Si la réponse temporelle présente un premier maximum supérieur à  $S_\infty$ ; C'est le cas lorsque la marge de phase est inférieure à environ  $80-90^\circ$  alors le temps d'établissement :

**$t_e$  est la date à laquelle on a ce premier maximum.**

Si la réponse temporelle ne présente pas de maximum (Pas de dépassement de la valeur finale) ou que le premier maximum est inférieure à  $S_\infty$ ; C'est le cas lorsque la marge de phase est proche ou supérieure à  $90^\circ$  alors le temps d'établissement :

**$t_e$  est le temps de réponse à 5%**  
 $t_e = t_{5\%}$ .

Exemples de réponses temporelles indicielle



### 6.2- Règle empirique

Remarque cette règle est empirique et n'est pas vraiment précise. Elle permet cependant de choisir une pulsation de coupure de la FTBO pour obtenir un temps de réponse à 5% de la FTBF.

## 7- Principe de la correction et exemples de correcteurs

### 1.1- Principes de la correction

Les trois qualités d'un asservissement sont :



Afin d'améliorer les performances de la FTBF on insère dans la FTBO un correcteur entre l'écart et la commande qui va donc modifier la FTBO, et notamment sa réponse fréquentielle.

La modification des performances s'analyse donc assez simplement sur la modification des lieux de Bode de la FTBO de la manière suivante :

- ☞ Pour améliorer la précision il faut augmenter le gain dans le domaine des basses pulsations
- ☞ Pour améliorer la vitesse il faut augmenter la pulsation de coupure à 0 dB de la FTBO :  $\omega_{0dB}$  : Tirer la courbe de gain vers la droite.
- ☞ Pour avoir une bonne stabilité il faut augmenter l'amortissement qui correspond aux marges de phases  $M_\phi$  et de gain  $M_G$ .

