Robot Kuka : Corrigé

1- Etude avec une boucle de retour simple

1.1- Fonctions de transfert du réducteur et de l'adaptateur

Le réducteur réduit la vitesse avec un Rapport N. D'autre part le bloc R(p) permet de passer d'une vitesse de rotation à une position angulaire. On a donc un intégrateur.

D'où la fonction de transfert de ce réducteur : $\mathbf{R(p) = \frac{1}{N.p}}$

En fonctionnement normal le gain de l'adaptateur est égal au gain du retour de la réponse au comparateur. Il faut donc également prendre en compte le bloc 180/π pour le changement d'unité.

D'où le gain de l'adaptateur : $\mathbf{K_A = \frac{K_R.\pi}{180}}$

1.2- Fonctions de transfert en boucle ouverte

La fonction de transfert en boucle ouverte est : $H_{BO1}(p) = C(p).M(p).R(p).K_R$

On en déduit donc : $\mathbf{H_{BO1}(p) = \frac{K_{C1}.K_M.K_R}{N.p.(1+\tau_M.p)} = \frac{K_{BO}}{p.(1+\tau_M.p)}}$ **avec :** $\mathbf{K_{BO} = \frac{K_{C1}.K_M.K_R}{N}}$

1.3- Condition sur K_{C1} pour satisfaire aux critères de précision

La fonction de transfert en boucle ouverte est de classe 1 (Un intégrateur dans $H_{BO1}(p)$) donc quelque soit la valeur de K_{C1} l'erreur statique en réponse à un échelon de consigne sera nulle.

Du fait de la présence de cet intégrateur dans a boucle ouverte l'erreur de trainage en réponse à une rampe de pente ω_C sera de : $\varepsilon_t = \frac{\omega_C}{K_{BO}}$. Or pour répondre au cahier des charges il faut que $\varepsilon_t \leq 1°$ pour une rampe de 105°/s. Ce qui est donc équivalent à : $\mathbf{K_{BO} \geq \frac{\omega_C}{\varepsilon_t}}$ **avec :** $\mathbf{\omega_C = 105\ °/s.}$

D'où la condition sur le gain du correcteur : $\mathbf{K_{C1} \geq \frac{N.\omega_C}{\varepsilon_t.K_M.K_R} = \frac{200 \times 105}{1 \times 5 \times 4} \Leftrightarrow K_{C1} \geq 1050}$

1.4- Pulsation correspondant à un gain de 0 décibel

Le gain dynamique en décibel de la fonction de transfert en boucle ouverte est de :

$$G_{dBBO}(\omega) = 20.\log K_{BO} - 20.\log \omega - 10.\log(1+\tau_M^2.\omega^2)$$

Soit : $$\mathbf{G_{dBBO}(\omega) = 10.\log K_{BO}^2 - 10.\log(\omega^2 + \tau_M^2.\omega^4)}$$

Donc la pulsation ω_{0dB} à laquelle ce gain est de 0 décibel est telle que :

$$K_{BO}^2 = \omega_{0dB}^2 + \tau_M^2.\omega_{0dB}^4 \Leftrightarrow 0 = -K_{BO}^2 + \omega_{0dB}^2 + \tau_M^2.(\omega_{0dB}^2)^2 \qquad (\Delta = 1 + 4.\tau_M^2.K_{BO}^2)$$

$$\Leftrightarrow \omega_{0dB}^2 = \frac{-1+\sqrt{1+4.\tau_M^2.K_{BO}^2}}{2.\tau_M^2}$$

$$\left(\omega_{0dB}^2 = \frac{-1-\sqrt{1+4.\tau_M^2.K_{BO}^2}}{2.\tau_M^2} \text{ à exclure car négatif}\right)$$

Donc la pulsation ω_{0dB} à laquelle ce gain est de 0 décibel est :

$$\mathbf{\omega_{0dB} = \sqrt{\frac{-1+\sqrt{1+4.\tau_M^2.K_{BO}^2}}{2.\tau_M^2}}}$$

1.5- Condition sur K_{C1} pour satisfaire aux critères de stabilité

Le phase de la fonction de transfert en boucle ouverte est de : $\boldsymbol{\varphi_{BO}(\omega) = -90 - \arctan(\tau_M.\omega)}$

Or pour répondre au critère de stabilité du cahier des charges il faut : $M_\varphi \geq 45°$

Soit : $180° + \varphi_{BO}(\omega_{0dB}) \geq 45° \Leftrightarrow 180° - 90 - \arctan(\tau_M.\omega_{0dB}) \geq 45°$

$\Leftrightarrow \arctan(\tau_M.\omega_{0dB}) \leq 45° \Leftrightarrow \tau_M.\omega_{0dB} \leq 1$

Etant donné l'expression de ω_{0dB} on en déduit que $M_\varphi \geq 45° \Leftrightarrow \dfrac{-1+\sqrt{1+4.\tau_M^2.K_{BO}^2}}{2.\tau_M^2} \leq \dfrac{1}{\tau_M^2}$

$\Leftrightarrow \sqrt{1+4.\tau_M^2.K_{BO}^2} \leq 2+1 \Leftrightarrow 4.\tau_M^2.K_{BO}^2 \leq 9-1 \Leftrightarrow \tau_M^2.K_{BO}^2 \leq 2$

Donc pour répondre au critère de stabilité du cahier des charges il faut que :

$$\mathbf{K_{BO} \leq \frac{\sqrt{2}}{\tau_M} \quad \Leftrightarrow \quad K_{C1} \leq \frac{N.\sqrt{2}}{K_M.K_R.\tau_M}}$$

Applications numérique : Pour $\boldsymbol{\tau_M = 0{,}45}$ **s** On obtient : $\mathbf{K_{C1} \leq 31{,}4}$

Pour $\boldsymbol{\tau_M = 0{,}25}$ **s** On obtient : $\mathbf{K_{C1} \leq 56{,}6}$

1.6- Conclusion

Pour répondre à tous les critères du cahier des charges il faut : $K_{C1} \geq 1050$ et : $K_{C1} \leq 31{,}4$

Ces conditions étant contradictoires, on en déduit que cette structure de l'asservissement ne permet pas de répondre à tous les critères du cahier des charges.

2- Etude avec une boucle de vitesse

2.1- Fonction de transfert de la boucle de vitesse

Etant donné le schéma bloc: $H_V(p) = \dfrac{\dfrac{K_{C2}.K_M}{1+\tau_M.p}}{1+\dfrac{K_{C2}.K_M.K_T}{1+\tau_M.p}}$

$$H_V(p) = \mathbf{\frac{K_{C2}.K_M}{K_{C2}.K_M.K_T + 1 + \tau_M.p}}$$

Soit : $\mathbf{H_V(p) = \dfrac{K_M'}{1+\tau_M'.p}}$ avec : $\mathbf{K_M' = \dfrac{K_{C2}.K_M}{1+K_{C2}.K_M.K_T}}$ et : $\boldsymbol{\tau_M' = \dfrac{\tau_M}{1+K_{C2}.K_M.K_T}}$

2.2- Conditions sur le nouveau gain de la boucle ouverte K'_{BO} et sur le gain K_{C2}

Pour répondre aux trois critères du cahier des charges il faut que : $\boldsymbol{\dfrac{\omega_C}{\varepsilon_t} \leq K_{BO}' \leq \dfrac{\sqrt{2}}{\tau_M'}}$

On doit donc avoir : $\dfrac{\omega_C}{\varepsilon_t} \leq \dfrac{\sqrt{2}}{\tau_M'} \Leftrightarrow \dfrac{\omega_C}{\varepsilon_t} \leq \dfrac{(1+K_{C2}.K_M.K_T).\sqrt{2}}{\tau_M} \Leftrightarrow \mathbf{K_{C2} \geq \dfrac{\tau_M.\omega_C/\varepsilon_t - \sqrt{2}}{K_M.K_T.\sqrt{2}}}$

<u>Application numérique :</u> $\dfrac{\tau_M.\omega_C/\varepsilon_t - \sqrt{2}}{K_M.K_T.\sqrt{2}} = \dfrac{0{,}45 \times 105/1 - \sqrt{2}}{5 \times 3{,}3.10^{-2} \times \sqrt{2}} = 196$

On doit donc avoir : $\Leftrightarrow$ $\mathbf{K_{C2} \geq 196}$

2.3- Conditions sur le gain K_{C1}

Pour répondre aux critères du cahier des charges on doit avoir : $\dfrac{\omega_C}{\varepsilon_t} \leq K_{BO}'$ et : $K_{BO}' \leq \dfrac{\sqrt{2}}{\tau_M'}$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{\omega_C}{\varepsilon_t} \leq \frac{K_{C1}.K_M'.K_R}{N} \qquad \text{et :} \quad \frac{K_{C1}.K_M'.K_R}{N} \leq \frac{\sqrt{2}}{\tau_M'}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{\omega_C}{\varepsilon_t} \leq \frac{K_{C1}.K_{C2}.K_M.K_R}{N.(1 + K_{C2}.K_M.K_T)} \qquad \text{et :} \quad \frac{K_{C1}.K_{C2}.K_M.K_R}{N.(1 + K_{C2}.K_M.K_T)} \leq \frac{\sqrt{2}(1 + K_{C2}K_M.K_T)}{\tau_M'}$$

$$\Leftrightarrow \quad \mathbf{K_{C1} \geq \frac{\omega_C.N.(1 + K_{C2}.K_M.K_R)/\varepsilon_t}{K_{C2}.K_M.K_R}} \qquad \text{et :} \quad \mathbf{K_{C1} \leq \frac{\sqrt{2}.N.(1 + K_{C2}.K_M.K_T)^2}{\tau_M.K_{C2}.K_M.K_R}}$$

Application numérique pour une valeur de $K_{C2} = 250$:

$$\frac{\omega_C.N.(1 + K_{C2}.K_M.K_R)/\varepsilon_t}{K_{C2}.K_M.K_R} = \frac{105 \times 200 \times (1 + 250 \times 5 \times 3{,}3.10^{-2}) / 1}{250 \times 5 \times 4} = 178$$

$$\frac{\sqrt{2}.N.(1 + K_{C2}.K_M.K_T)^2}{\tau_M.K_{C2}.K_M.K_R} = \frac{\sqrt{2} \times 200 \times (1 + 250 \times 5 \times 3{,}3.10^{-2})^2}{0{,}45 \times 250 \times 5 \times 4} = 224$$

Pour répondre aux critères du cahier des charges il faut : $K_{C1} \geq 178$ et : $K_{C1} \leq 178$

Il n'y a donc plus d'incompatibilité entre les critères de précision et de stabilité. Le cahier des charges peut donc être satisfait pour $K_{C2} = 250$ et $178 \leq K_{C1} \leq 224$

2.4- Vérification pour une constante de temps $\tau_M = 0{,}25$ s

On choisit $K_{C1} = 200$ et $K_{C2} = 250$

Pour une constante de temps $\tau_M = 0{,}25$ s $\qquad \tau_M' = \dfrac{0{,}25}{1 + 250 \times 5 \times 3{,}3.10^{-2}} = 5{,}92.10^{-3}$ s

Soit : $\qquad \mathbf{\dfrac{\sqrt{2}}{\tau_M'} = \dfrac{\sqrt{2}}{5{,}92.10^{-3}} = 239\ s^{-1}}$

Pour une constante de temps $\tau_M = 0{,}25$ s $\qquad K_M' = \dfrac{250 \times 5}{1 + 250 \times 5 \times 3{,}3.10^{-2}} = 29{,}6$ rad.s^{-1}.V^{-1}

Soit : $\qquad \mathbf{K_{BO}' = \dfrac{200 \times 29{,}6 \times 4}{200} = 118{,}4\ s^{-1}}$

D'autre part : $\qquad \mathbf{\dfrac{\omega_C}{\varepsilon_t} = 105\ s^{-1}}$

Pour ces différentes valeurs de τ_M, K_{C1} et K_{C2} on a donc bien :

$$\mathbf{\frac{\omega_C}{\varepsilon_t} \leq K_{BO}' \leq \frac{\sqrt{2}}{\tau_M'}}$$

Le cahier des charges est donc satisfait.