MP 2024-2025 Bassin de traction du LHEEA Corrigé DS N°2

Question 1 – Accélération du chariot

La distance parcourue par le chariot représente l'aire sous la courbe du diagramme des vitesses

Donc : $X_f - X_0 = \dfrac{V_m.T_1}{2} + V_m.t_{acq} + \dfrac{V_m.(T_3 - T_2)}{2}$

Sachant que les phases 1 et 3 ont la même valeur absolue de l'accélération on a : $T_3 - T_2 = T_1$

On en déduit : $X_f - X_0 = \dfrac{V_m.T_1}{2} + V_m.t_{acq} + \dfrac{V_m.T_1}{2}$

Soit : $\mathbf{T_1 = \dfrac{X_f - X_0}{V_m} - t_{acq}}$ A.N. : $\mathbf{T_1 = \dfrac{130 - 10}{8} - 10 = 5\ s}$

Sachant que l'accélération représente la pente de la droite de la 1ière phase : $\gamma = \dfrac{V_m}{T_1}$

On obtient : $\boldsymbol{\gamma = \dfrac{V_m^{\,2}}{X_f - X_0 - V_m.t_{acq}}}$ A.N. : $\boldsymbol{\gamma = \dfrac{8^2}{130 - 10 - 8\times 10} = 1{,}6\ m.s^{-2}}$

Question 2 – Energie cinétique des roues

Pour les deux roues, le point O étant le centre d'inertie de la roue, d'après le théorème de Huygens :

$$\mathbf{J_R(I) = J_R(O) + m_R.R^2}$$

Le mouvement des roues étant une rotation autour de l'axe $(I, \overrightarrow{z_0})$ l'énergie cinétique des roues est :

$$\mathbf{E_C(1/0) = E_C(2/0) = \frac{1}{2}.J_R(I).\omega_R^{\,2} = \frac{1}{2}.(\,J_R(O) + m_R.R^2\,).\omega_R^{\,2}}$$

Question 3 – Energie cinétique du système isolé

Ayant un roulement sans glissement entre la roue 1 et le rail 0 au point I_1 : $\overrightarrow{V_{I1\in 1/0}} = \vec{0}$

De la relation de Varignon on a : $\overrightarrow{V_{O1\in 1/0}} = \overrightarrow{V_{I1\in 1/0}} + \overrightarrow{O_1I_1} \wedge \overrightarrow{\Omega_{1/0}} = \vec{0} - R.\overrightarrow{y_0} \wedge \omega_R.\overrightarrow{z_0} = -R.\omega_R.\overrightarrow{x_0}$

D'autre part le point O_1 étant le centre de la liaison pivot entre 1 et 3 on a : $\overrightarrow{V_{O1\in 1/0}} = \overrightarrow{V_{O1\in 3/0}}$

Enfin le chariot 3 étant en translation par rapport au rail : $\overrightarrow{V_{O1\in 3/0}} = \overrightarrow{V_{G3\in 3/0}} = V_3.\overrightarrow{x_0}$

On a donc : $\overrightarrow{V_{O1\in 1/0}} = \overrightarrow{V_{G3\in 3/0}} = -R.\omega_R.\overrightarrow{x_0} = V_3.\overrightarrow{x_0}$ Soit : $\mathbf{V_3 = -R.\omega_R}$

Le chariot 3 étant en mouvement de translation son énergie cinétique est : $E_C(3/0) = \dfrac{1}{2}.m_3.V_3^{\,2}$

D'où l'énergie cinétique du système isolé Σ : $E_C(\Sigma/0) = E_C(1/0) + E_C(2/0) + E_C(3/0)$

$$E_C(\Sigma/0) = 2\times\frac{1}{2}.(\,J_R(O) + m_R.R^2\,).\omega_R^{\,2} + \frac{1}{2}.m_3.V_3^{\,2} \quad \text{avec :} \quad \omega_R = -\frac{V_3}{R}$$

On en déduit donc : $\mathbf{E_C(\Sigma/0) = \dfrac{1}{2}.M_{eq}.V_3^{\,2}}$ avec : $\mathbf{M_{eq} = m_3 + 2.m_R + \dfrac{2.J(O)}{R^2}}$

Question 4 – Puissances Galiléenne

<u>Les actions mécaniques extérieures du système Σ sont :</u>

Le poids du chariot 3 : $P(pes\rightarrow 3/0) = -m_3.g.\overrightarrow{y_0}\,.\,\overrightarrow{V_{G3\in 3/0}} = -m_3.g.\overrightarrow{y_0}\,.\,V_3.\overrightarrow{x_0} = 0$

Le poids de la roue 1 : $P(pes\rightarrow 1/0) = -m_R.g.\overrightarrow{y_0}\,.\,\overrightarrow{V_{O1\in 1/0}} = -m_R.g.\overrightarrow{y_0}\,.\,V_3.\overrightarrow{x_0} = 0$

Le poids de la roue 2 : $P(pes\rightarrow 2/0) = -m_R.g.\overrightarrow{y_0}\,.\,\overrightarrow{V_{O2\in 2/0}} = -m_R.g.\overrightarrow{y_0}\,.\,V_3.\overrightarrow{x_0} = 0$

L'action du rail sur la roue 1 : $P(0\rightarrow 1/0) = \overrightarrow{R_{0\rightarrow 1}} \cdot \overrightarrow{V_{I1\in 1/0}} = 0$ Car : $\overrightarrow{V_{I1\in 1/0}} = \vec{0}$

L'action du rail sur la roue 2 : $P(0\rightarrow 2/0) = \overrightarrow{R_{0\rightarrow 2}} \cdot \overrightarrow{V_{I2\in 2/0}} = 0$ Car : $\overrightarrow{V_{I2\in 2/0}} = \vec{0}$

On a donc la somme des puissances galiléenne des actions extérieure : $\mathbf{\Sigma\ P(Ext\rightarrow\Sigma/0) = 0}$

<u>Les actions mécaniques intérieures du système Σ sont :</u>

Le couple du moteur 1 sur le réducteur 1 : $P(mot_1\rightarrow red_1/0) = C_m.\overrightarrow{z_0}.\overrightarrow{\Omega_{red/0}} = C_m.\overrightarrow{z_0}.\omega_m.\overrightarrow{z_0} = C_m.\omega_m$

Le couple du réducteur 1 sur le moteur 1 : $P(red_1\rightarrow mot_1/0) = -C_m.\overrightarrow{z_0}.\overrightarrow{\Omega_{mot/0}} = -C_m.\overrightarrow{z_0}.\vec{0} = 0$

Le couple du moteur 2 sur le réducteur 2 : $P(mot_2\rightarrow red_2/0) = C_m.\overrightarrow{z_0}.\overrightarrow{\Omega_{red/0}} = C_m.\overrightarrow{z_0}.\omega_m.\overrightarrow{z_0} = C_m.\omega_m$

Le couple du réducteur 2 sur le moteur 2 : $P(red_2\rightarrow mot_2/0) = -C_m.\overrightarrow{z_0}.\overrightarrow{\Omega_{mot/0}} = -C_m.\overrightarrow{z_0}.\vec{0} = 0$

Le couple du réducteur 1 sur la roue 1 : $P(red_1\rightarrow 1/0) = C_R.\overrightarrow{z_0}.\overrightarrow{\Omega_{1/0}} = C_R.\overrightarrow{z_0}.\omega_R.\overrightarrow{z_0} = C_R.\omega_R$

Le couple de la roue 1 sur le réducteur 1 : $P(1\rightarrow red_1/0) = -C_R.\overrightarrow{z_0}.\overrightarrow{\Omega_{1/0}} = -C_R.\overrightarrow{z_0}.\omega_R.\overrightarrow{z_0} = -C_R.\omega_R$

Le couple du réducteur 2 sur la roue 2 : $P(red_2\rightarrow 2/0) = C_R.\overrightarrow{z_0}.\overrightarrow{\Omega_{2/0}} = C_R.\overrightarrow{z_0}.\omega_R.\overrightarrow{z_0} = C_R.\omega_R$

Le couple de la roue 2 sur le réducteur 2 : $P(2\rightarrow red_2/0) = -C_R.\overrightarrow{z_0}.\overrightarrow{\Omega_{2/0}} = -C_R.\overrightarrow{z_0}.\omega_R.\overrightarrow{z_0} = -C_R.\omega_R$

On a donc la somme des puissances galiléenne des actions intérieure : $\mathbf{\Sigma\ P(Int\rightarrow\Sigma/0) = 2.C_m.\omega_m}$

<u>Question 5 – Couple moteur</u>

L'application du théorème de l'énergie cinétique au système Σ s'écrit :

$$\frac{d\,E_C(\Sigma/0)}{dt} = \Sigma\ P(Ext\rightarrow\Sigma/0) + \Sigma\ P(Int\rightarrow\Sigma/0) \quad\Leftrightarrow\quad M_{eq}.V_3.\gamma = 0 + 2.C_m.\omega_m$$

D'autre part : $\omega_m = \dfrac{\omega_R}{k}$ et : $\omega_R = -\dfrac{V_3}{R}$ Donc : $M_{eq}.V_3.\gamma = -2.C_m.\dfrac{V_3}{k.R}$

D'où le couple moteur permettant l'accélération γ : $\mathbf{C_m = -\dfrac{M_{eq}.k.R}{2}.\gamma}$ A.N. : $C_m = -56{,}3$ N.m

<u>Question 6 – Actions mécaniques extérieures sur la roue 1</u>

On isole la roue 1 les actions mécaniques extérieures s'appliquant sur cette roue 1 sont :

☞ Le poids de la roue 1 : Une [illegible].g. $\overrightarrow{y_0}$ appli[illegible]uée [illegible] O_1.

$$\{T_{pes\rightarrow 1}\} = \underset{O_1}{\begin{Bmatrix} -m_R.g.\overrightarrow{y_0} \\ \\ \vec{0} \end{Bmatrix}} = \underset{O_1}{\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ -m_R.g & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}}_{b_0}$$

☞ L'action du rail 0 sur la r[illegible] due à l[illegible]a[illegible]on ponctuelle avec adhérence :

$$\{T_{0\rightarrow 1}\} = \underset{I_1}{\begin{Bmatrix} \overrightarrow{R_{0\rightarrow 1}} \\ \\ \vec{0} \end{Bmatrix}} = \underset{I_1}{\begin{Bmatrix} X_{01} & - \\ Y_{01} & - \\ - & 0 \end{Bmatrix}}_{b_0}$$

avec : $|X_{01}| \le f.|Y_{01}|$

☞ L'action du réducteur 1 sur la roue 1 :

$$\{T_{0\rightarrow 1}\} = \underset{O_1}{\begin{Bmatrix} \vec{0} \\ \\ C_R.\overrightarrow{z_0} \end{Bmatrix}} = \underset{O_1}{\begin{Bmatrix} 0 & - \\ 0 & - \\ - & C_R \end{Bmatrix}}_{b_0}$$

☞ L'action du chariot 3 sur l[illegible]u[illegible] 1 due à la[illegible]on pivot d'axe $(O_1, \overrightarrow{z_0})$

$$\{T_{3\rightarrow 1}\} = \underset{O_1}{\begin{Bmatrix} X_{31} & - \\ Y_{31} & - \\ - & 0 \end{Bmatrix}}_{b_0} = \underset{O_1}{\begin{Bmatrix} \overrightarrow{R_{3\rightarrow 1}} \\ \\ \vec{0} \end{Bmatrix}}$$

Question 7 – Composante tangentielle de l'action du rail 0 sur les roues 1 et 2

L'application du Théorème du moment dynamique en O_1 projeté sur l'axe $\overrightarrow{z_0}$ donne :

$$\overrightarrow{\delta_{O1}(1/0)}.\overrightarrow{z_0} = \vec{0}.\overrightarrow{z_0} + \overrightarrow{O_1I_1}\wedge\overrightarrow{R_{0\to1}} + C_R.\overrightarrow{z_0}.\overrightarrow{z_0} + \vec{0}.\overrightarrow{z_0}$$

$$\Leftrightarrow \quad J_R(O).\dot{\omega}_R = -R.\overrightarrow{y_0}\wedge(X_{01}.\overrightarrow{x_0} + Y_{01}.\overrightarrow{y_0}).\overrightarrow{z_0} + C_R = R.X_{01} + C_R$$

D'autre part : $\omega_R = -\dfrac{V_3}{R} \Rightarrow \dot{\omega}_R = -\dfrac{d\,V_3(t)}{dt}.\dfrac{1}{R} = -\dfrac{\gamma}{R}$ et : $C_R = \dfrac{C_m}{k} = -\dfrac{1}{k}.\dfrac{M_{eq}.k.R}{2}.\gamma$

On a donc : $-J_R(O).\dfrac{\gamma}{R} = R.X_{01} - \dfrac{M_{eq}.R}{2}.\gamma$ Soit : $X_{01} = \left(\dfrac{M_{eq}}{2} - \dfrac{J_R(O)}{R^2}\right).\gamma$

D'autre part on a : $M_{eq} = m_3 + 2.m_R + \dfrac{2.J(O)}{R^2}$ D'où : $\mathbf{X_{01} = \left(\dfrac{m_3}{2} + m_R\right).\gamma}$

Par un TMD en O_2 sur la roue 2 on obtient également : $\mathbf{X_{02} = \left(\dfrac{m_3}{2} + m_R\right).\gamma}$

Question 8 – Composante normale de l'action du rail 0 sur la roue 1

On isole le système Σ. Le bilan des actions mécaniques extérieures est :

- ☞ Le poids du chariot 3 : Une force $\overrightarrow{P_3} = -m_3.g.\overrightarrow{y_0}$ appliquée en G_3
- ☞ Le poids de la roue 1 : Une force $\overrightarrow{P_1} = -m_R.g.\overrightarrow{y_0}$ appliquée en O_1
- ☞ Le poids de la roue 2 : Une force $\overrightarrow{P_2} = -m_R.g.\overrightarrow{y_0}$ appliquée en O_2
- ☞ L'action du rail sur la roue 1 : Une force $\overrightarrow{R_{0\to1}} = X_{01}.\overrightarrow{x_0} + Y_{01}.\overrightarrow{y_0}$ appliquée en I_1
- ☞ L'action du rail sur la roue 2 : Une force $\overrightarrow{R_{0\to2}} = X_{02}.\overrightarrow{x_0} + Y_{02}.\overrightarrow{y_0}$ appliquée en I_2

Les inconnues de ces actions sont uniquement Y_{01} et Y_{02} Pour déterminer Y_{01} il faut donc :

Appliquer un théorème du moment dynamique en I_2 projeté sur l'axe $\overrightarrow{z_0}$.

<u>Calculons la somme des moments en I_2 projeté sur z_0 des actions extérieures s'appliquant sur Σ :</u>

$$\Sigma\,\overrightarrow{\mathcal{M}_{I2}(Ext\to\Sigma)}.\overrightarrow{z_0} = \overrightarrow{I_2G_3}\wedge\overrightarrow{P_3}.\overrightarrow{z_0} + \overrightarrow{I_2O_1}\wedge\overrightarrow{P_1}.\overrightarrow{z_0} + \overrightarrow{I_2O_2}\wedge\overrightarrow{P_2}.\overrightarrow{z_0} + \overrightarrow{I_2I_1}\wedge\overrightarrow{R_{0\to1}}.\overrightarrow{z_0} + \vec{0}.\overrightarrow{z_0}$$

En écrivant cette somme dans la base b_0 on a :

$$\begin{pmatrix} L \\ R+H \\ 0 \end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix} 0 \\ -m_3.g \\ 0 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2.L \\ R \\ 0 \end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix} 0 \\ -m_R.g \\ 0 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ R \\ 0 \end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix} 0 \\ -m_R.g \\ 0 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2.L \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix} X_{01} \\ Y_{01} \\ 0 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 0$$

On en déduit : $\mathbf{\Sigma\,\overrightarrow{\mathcal{M}_{I2}(Ext\to\Sigma)}.\overrightarrow{z_0} = 2.L.Y_{01} - (m_3 + 2.m_R).g.L}$

<u>Calculons le moments dynamiques en I_2 projeté sur z_0 de Σ dans son mouvement par rapport à 0 :</u>

$$\overrightarrow{\delta_{I2}(\Sigma/0)} = \overrightarrow{\delta_{I2}(1/0)} + \overrightarrow{\delta_{I2}(2/0)} + \overrightarrow{\delta_{I2}(3/0)}$$

$$\overrightarrow{\delta_{I2}(\Sigma/0)} = \overrightarrow{\delta_{O1}(1/0)} + \overrightarrow{I_2O_1}\wedge m_R.\overrightarrow{\Gamma_{O1\in1/0}} + \overrightarrow{\delta_{O2}(2/0)} + \overrightarrow{I_2O_2}\wedge m_R.\overrightarrow{\Gamma_{O2\in2/0}} + \overrightarrow{\delta_{G3}(3/0)} + \overrightarrow{I_2G_3}\wedge m_3.\overrightarrow{\Gamma_{G3\in3/0}}$$

O_1 et O_2 étant les centres des liaisons pivot de 1 et 2 avec 3 : $\overrightarrow{\Gamma_{O1\in1/0}} = \overrightarrow{\Gamma_{O2\in2/0}} = \overrightarrow{\Gamma_{G3\in3/0}} = \gamma.\overrightarrow{x_0}$

Et le chariot 3 de centre d'inertie G_3 étant en translation : $\overrightarrow{\delta_{G3}(3/0)} = \vec{0}$

En écrivant cette somme dans la base b_0 on a alors :

$$\overrightarrow{\delta_{I2}(\Sigma/0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ J_R(O).\dot{\omega}_R \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2.L \\ R \\ 0 \end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix} m_R.\gamma \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ J_R(O).\dot{\omega}_R \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ R \\ 0 \end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix} m_R.\gamma \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} L \\ R+H \\ 0 \end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix} m_3.\gamma \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

On en déduit dans la base b_0 : $\overrightarrow{\delta_{I2}(\Sigma/0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2.J_R(O).\dot{\omega}_R - [2.m_R.R + m_3.(R + H)].\gamma \end{pmatrix}$

Soit en projection sur l'axe $\overrightarrow{z_0}$: $\overrightarrow{\delta_{I2}(\Sigma/0)}.\overrightarrow{z_0} = 2.J_R(O).\dot{\omega}_R - [2.m_R.R + m_3.(R + H)].\gamma$

D'autre part on sait que $\dfrac{d\,\omega_R(t)}{dt} = \dot{\omega}_R = -\dfrac{\gamma}{R}$

On en déduit : $\mathbf{\overrightarrow{\delta_{I2}(\Sigma/0)}.\overrightarrow{z_0} = -\left[\dfrac{2.J_R(O)}{R} + 2.m_R.R + m_3.(R+H)\right].\gamma}$

L'application du TMD en I_2 projeté sur $\overrightarrow{z_0}$: $\mathbf{\Sigma\,\overrightarrow{\mathcal{M}_{I2}(Ext\to\Sigma)}.\overrightarrow{z_0} = \overrightarrow{\delta_{I2}(\Sigma/0)}.\overrightarrow{z_0}}$ donne donc :

$$2.L.Y_{01} - (m_3 + 2.m_R).g.L = -\left[\frac{2.J_R(O)}{R} + 2.m_R.R + m_3.(R+H)\right].\gamma$$

Finalement on obtient : $\mathbf{Y_{01} = \left(\dfrac{m_3}{2} + m_R\right).g - \left(\dfrac{J_R(O)}{L.R} + m_3.\dfrac{R+H}{2.L} + m_R.\dfrac{R}{L}\right).\gamma}$

Question 9 – Composante normale de l'action du rail 0 sur la roue 2

On isole le système Σ. Le bilan des actions mécaniques extérieures est :

- ☞ Le poids du chariot 3 : Une force $\overrightarrow{P_3} = -m_3.g.\overrightarrow{y_0}$ appliquée en G_3
- ☞ Le poids de la roue 1 : Une force $\overrightarrow{P_1} = -m_R.g.\overrightarrow{y_0}$ appliquée en O_1
- ☞ Le poids de la roue 2 : Une force $\overrightarrow{P_2} = -m_R.g.\overrightarrow{y_0}$ appliquée en O_2
- ☞ L'action du rail sur la roue 1 : Une force $\overrightarrow{R_{0\to1}} = X_{01}.\overrightarrow{x_0} + Y_{01}.\overrightarrow{y_0}$ appliquée en I_1
- ☞ L'action du rail sur la roue 2 : Une force $\overrightarrow{R_{0\to2}} = X_{02}.\overrightarrow{x_0} + Y_{02}.\overrightarrow{y_0}$ appliquée en I_1

L'unique inconnue de ces actions est maintenant Y_{02} donc pour déterminer Y_{02} il faut donc :

Soit : **Appliquer un théorème du moment dynamique en I_1 projeté sur l'axe $\overrightarrow{z_0}$.**

ou : **Appliquer un théorème de la résultante dynamique projeté sur l'axe $\overrightarrow{y_0}$.**

Remarque : Calcul non demandé

Le TRD en projection sur $\overrightarrow{y_0}$ donne : $-m_3.g - m_R.g - m_R.g + Y_{01} + Y_{02} = 0$

Soit : $Y_{02} = (m_3 + 2.m_R).g - Y_{01}$ $\mathbf{Y_{02} = \left(\dfrac{m_3}{2} + m_R\right).g + \left(\dfrac{J_R(O)}{L.R} + m_3.\dfrac{R+H}{2.L} + m_R.\dfrac{R}{L}\right).\gamma}$

Question 10 – Choix du matériau de bandage des roues

Avec un coefficient de sécurité s = 2, il nous faut un facteur de frottement tel que :

$f \geq 2.f_1 \geq 2.f_2$ Soit : $f \geq 2 \times 0{,}177 = 0{,}354$

Le tableau 1 nous montre alors qu'il faut pour la roue un bandage en PVC avec lequel on a *f* = 0,5.

Question 11 – Gain de l'adaptateur

Il y a un roulement sans glissement de la roue motrice sur le rail. Donc : $V(p) = R.\Omega_R(p)$

De même il y a un roulement sans glissement de la roue libre sur le rail. Donc : $V(p) = r.\Omega_{rl}(p)$

On en déduit : **$K_8 = R$ (ou $K_8 = -R$) en m** et : **$K_9 = \dfrac{1}{r}\left(\text{ou } K_9 = -\dfrac{1}{r}\right)$ en m^{-1}**

Du schéma bloc de la figure 10 on en déduit : $\varepsilon_U(p) = K_1.V_C(p) - K_9.K_{10}.K_{11}.V(p)$

Or pour $V(p) = V_C(p)$ on souhaite $\varepsilon_U(p) = 0$ Soit : $0 = (K_1 - K_9.K_{10}.K_{11}).V_C(p)$

Il faut donc : **$K_1 = K_9.K_{10}.K_{11}$ (en $V.s.m^{-1}$)**

Question 12 – Fonctions de transfert

Du schéma bloc de la figure 10 on en déduit : $H_1(p) = \dfrac{K_a.C(p).H_m(p).K_b}{1 + K_a.C(p).H_m(p).K_b}$

$$H_1(p) = \frac{\dfrac{K_a.C.K_m.K_b}{(1+T_e.p).(1+T_m.p)}}{1+\dfrac{K_a.C.K_m.K_b}{(1+T_e.p).(1+T_m.p)}} = \frac{K_{BO}}{(1+T_e.p).(1+T_m.p)+K_{BO}} = \frac{K_{BO}}{1+K_{BO}+(T_e+T_m).p+T_e.T_m.p^2}$$

Soit sous forme canonique : $$\mathbf{H_1(p) = \frac{\dfrac{K_{BO}}{1+K_{BO}}}{1+\dfrac{T_e+T_m}{1+K_{BO}}.p+\dfrac{T_e.T_m}{1+K_{BO}}.p^2}}$$

Du schéma bloc de la figure 10 on en déduit : $H_2(p) = \dfrac{-K_c.(1+T_e.p).H_m(p).K_b}{1+K_a.C(p).H_m(p).K_b}$

$$H_2(p) = \frac{\dfrac{K_c.(1+T_e.p).K_m.K_b}{(1+T_e.p).(1+T_m.p)}}{1+\dfrac{K_a.C.K_m.K_b}{(1+T_e.p).(1+T_m.p)}} = \frac{K_c.K_b.K_m.(1+T_e.p)}{(1+T_e.p).(1+T_m.p)+K_{BO}} = \frac{K_c.K_b.K_m.(1+T_e.p)}{1+K_{BO}+(T_e+T_m).p+T_e.T_m.p^2}$$

Soit sous forme canonique : $$\mathbf{H_2(p) = \frac{\dfrac{K_c.K_b.K_m}{1+K_{BO}}.(1+T_e.p)}{1+\dfrac{T_e+T_m}{1+K_{BO}}.p+\dfrac{T_e.T_m}{1+K_{BO}}.p^2}}$$

D'après le théorème de la valeur finale : $\upsilon_1 = \lim_{t\to\infty} \upsilon_1(t) = \lim_{p\to 0} p.V_1(p)$

D'autre part : $V_1(p) = H_1(p).V_C(p)$ avec : $V_C(p) = \dfrac{V_0}{p}$ D'où : $p.V_1(p) = V_0.H_1(p)$

Etant donné l'expression précédente on en déduit : $\boldsymbol{\upsilon_1 = \lim_{p\to 0} V_0.H_1(p) = \dfrac{V_0.K_{BO}}{1+K_{BO}}}$

D'après le théorème de la valeur finale : $\upsilon_2 = \lim_{t\to\infty} \upsilon_2(t) = \lim_{p\to 0} p.V_2(p)$

D'autre part : $V_2(p) = H_2(p).F_{res}(p)$ avec : $F_{res}(p) = \dfrac{F_0}{p}$ D'où : $p.V_2(p) = F_0.H_2(p)$

Etant donné l'expression précédente on en déduit : $\boldsymbol{\upsilon_2 = \lim_{p\to 0} F_0.H_2(p) = -\dfrac{F_0.K_c.K_b.K_m}{1+K_{BO}}}$

Question 13 – Gain du correcteur pour une influence de la perturbation négligeable

Des expressions précédentes on a : $\dfrac{|\upsilon_2|}{|\upsilon_1|} = \dfrac{F_0.K_c.K_b.K_m}{V_0.K_{BO}} = \dfrac{F_0.K_c.K_b.K_m}{V_0.K_a.K_b.C.K_m} = \dfrac{F_0.K_c}{V_0.K_a.C}$

Donc : $|\upsilon_2| \leq 0{,}1.|\upsilon_1| \quad \Leftrightarrow \quad \dfrac{F_0.K_c}{V_0.K_a.C} \leq 0{,}1$

Donc pour une influence de la perturbation négligeable il faut : $\boldsymbol{C \geq \dfrac{F_0.K_c}{0{,}1.V_0.K_a} = 0{,}05}$

Question 14 – Correcteur proportionnel

Avec un correcteur proportionnel la classe de la FTBO est de zéro. Donc l'erreur statique en réponse à un échelon V_0 sera de : $\dfrac{V_0}{1+C.K_N}$ qui quelque soit la valeur de C ne peut pas être nulle.

Donc avec un correcteur proportionnel le critère 1.2.3 qui exige un erreur nulle en réponse à un échelon de consigne V_0 ne peut pas être vérifié.

Question 15 – Respect de la marge de phase

On voit sur le diagramme de Bode qu'avec ce correcteur PI de gain 1 la pulsation où la phase de la FTBO est de – 135° est de 2 rad.s^{-1}. Phase à laquelle on aura la marge de phase de l'exigence 1.2.2. : 45°.

Or on voit sur ce même diagramme de Bode qu'avec C = 1 le gain dynamique à cette pulsation est de + 3dB. Donc pour obtenir cette marge de phase de 45° il faut translater la courbe de gain de – 3 dB.

Donc la condition sur le gain C du correcteur permettant de satisfaire l'exigence 1.2.2. est :

$$\mathbf{C \leq C_\varphi = 10^{-3/20} = 0{,}71}$$

Question 16 – FTBF avec le correcteur PI

Avec ce correcteur PI la FTBO devient : $H_{BO}(p) = \dfrac{C.K_N}{T_m.p.(1 + T_e.p)}$

D'où la FTBF : $H_{BF}(p) = \dfrac{H_{BO}(p)}{1 + H_{BO}(p)} = \dfrac{\dfrac{C.K_N}{T_m.p.(1 + T_e.p)}}{1 + \dfrac{C.K_N}{T_m.p.(1 + T_e.p)}} = \dfrac{C.K_N}{C.K_N + T_m.p + T_e.T_m.p}$

Soit finalement sous forme canonique : $\mathbf{H_{BF}(p) = \dfrac{1}{1 + \dfrac{T_m}{C.K_N}.p + \dfrac{T_e.T_m}{C.K_N}.p^2}}$

Fonction du 2nd ordre avec : ☞ Une gain statique $\mathbf{K_{BF} = 1}$

☞ Une pulsation propre : $\mathbf{\omega_0 = \sqrt{\dfrac{C.K_N}{T_e.T_m}}}$

☞ Un facteur d'amortissement : $\mathbf{\xi = \dfrac{1}{2}.\sqrt{\dfrac{C.K_N}{T_e.T_m}}.\dfrac{T_m}{C.K_N} = \dfrac{\sqrt{T_m}}{2.\sqrt{T_e.C.K_N}}}$

Question 17 – Respect de la rapidité

Pour minimiser le temps de réponse à 5%, il faut choisir C tel que ξ = 0,69.

$$\frac{\sqrt{T_m}}{2.\sqrt{T_e.C.K_N}} = 0{,}69 \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{C = C_{rapid} = \frac{T_m}{4\times 0{,}69^2.T_e.K_N} = 0{,}26}$$

Question 18 – Respect de l'exigence 1.2

Avec un correcteur de gain C = 0,25 :

- ☞ $C \leq C_\varphi$ donc le critère de marge de phase est respecté
- ☞ La FTBO étant un second ordre la marge de gain est : $M_G = +\infty \geq 12$ dB donc le critère de marge de gain est respecté
- ☞ Le gain de la FTBF est unitaire donc l'erreur statique est nulle (Confirmé par la réponse temporelle donnée sur le document réponse). Donc le critère de précision est respecté.
- ☞ La réponse temporelle donnée sur le document réponse nous montre un temps de réponse à 5% de $T_{r5\%} \approx 2$ s ≤ 3 s. Donc le critère de rapidité est respecté.

Ce correcteur permet donc de respecter tous les critères de l'exigence 1.2.

Question 19 – Fermeture géométrique

Fermeture géométrique du cycle 0-7-8-9-0 : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} \quad \Leftrightarrow \quad b.\overrightarrow{y_7} + \lambda.\overrightarrow{x_9} = d.\overrightarrow{x_0} + b.\overrightarrow{y_0}$

Soit en projection $\left|\begin{array}{l} \text{sur } \overrightarrow{x_0} : -b.\sin\theta + \lambda.\cos\alpha = d \\ \text{sur } \overrightarrow{y_0} : b.\cos\theta + \lambda.\sin\alpha = b \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \quad \left|\begin{array}{l} \lambda.\cos\alpha = d + b.\sin\theta \\ \lambda.\sin\alpha = b - b.\cos\theta \end{array}\right.$

De ces deux équation on en déduit : $\lambda = \sqrt{(d + b.\sin\theta)^2 + (b - b.\cos\theta)^2}$

En considérant θ au voisinage de 0 on obtient : $\lambda = \sqrt{(d + b.\theta)^2 + (b - b)^2} \Rightarrow \lambda = d + b.\theta$

Question 20 – Loi de mouvement

De l'équation linéarisée précédente on obtient par dérivation : $\frac{d\,\lambda(t)}{dt} = b.\frac{d\,\theta(t)}{dt}$

Question 21 – Puissance galiléenne élémentaire

Par la relation de Varignon : $\overrightarrow{V_{M\in 7/0}} = \overrightarrow{V_{A\in 7/0}} + \overrightarrow{MA} \wedge \overrightarrow{\Omega_{7/0}} = \overrightarrow{V_{A\in 7/0}} - u.\overrightarrow{y_7} \wedge \frac{d\,\theta(t)}{dt}.\overrightarrow{z_7}$

Avec : $\overrightarrow{V_{A\in 7/0}} = \vec{0}$ Car A est le centre de la pivot entre 7 et 0. D'où : $\overrightarrow{V_{M\in 7/0}} = -u.\frac{d\,\theta(t)}{dt}.\overrightarrow{x_7}$

Enfin de la relation obtenue à la question 20 on a : $\frac{d\,\theta(t)}{dt} = \frac{1}{b}.\frac{d\,\lambda(t)}{dt} \Rightarrow \overrightarrow{V_{M\in 7/0}} = -\frac{u}{b}.\frac{d\,\lambda(t)}{dt}.\overrightarrow{x_7}$

$\Delta p(M) = \frac{1}{2}.\rho.\overrightarrow{V_{M\in 7/0}}^2$ et : $\overrightarrow{dF(M)} = \Delta p(M).ds.\overrightarrow{x_7} \Rightarrow \overrightarrow{dF(M)} = \frac{1}{2}.\rho.\left(\frac{u}{b}\right)^2.\left(\frac{d\,\lambda(t)}{dt}\right)^2.ds.\overrightarrow{x_7}$

Enfin ayant : $dP(M) = \overrightarrow{dF(M)}.\overrightarrow{V_{M\in 7/0}}$ On obtient : $dP(M) = -\frac{1}{2}.\rho.\left(\frac{u}{b}\right)^3.\left(\frac{d\,\lambda(t)}{dt}\right)^3.ds$

Question 22 – Puissance galiléenne maximale

Du mouvement sinusoïdale de la tige du vérin on obtien t : $\frac{d\,\lambda(t)}{dt} = \lambda_0.\omega_B.\cos(\omega_B.t)$

On en déduit la puissance élémentaire : $dP(M) = -\frac{1}{2}.\rho.\left(\frac{\lambda_0.\omega_B}{b}\right)^3.\cos^3(\omega_B.t).u^3.ds$

D'autre part $ds = \ell.du$ $dP(M) = -\frac{1}{2}.\rho.\left(\frac{\lambda_0.\omega_B}{b}\right)^3.\ell.\cos^3(\omega_B.t).u^3.du$

Enfin : $P_{e\to 7/0} = \int_0^h dP(M) = -\frac{1}{2}.\rho.\left(\frac{\lambda_0.\omega_B}{b}\right)^3.\ell.\cos^3(\omega_B.t).\int_0^h u^3.du$

On obtient finalement : $P_{e\to 7/0} = -\frac{h^4}{8}.\rho.\left(\frac{\lambda_0.\omega_B}{b}\right)^3.\ell.\cos^3(\omega_B.t)$

Soit la puissance maximale : $P_{e\to 7/0,Max} = -\frac{h^4}{8}.\rho.\left(\frac{\lambda_0.\omega_B}{b}\right)^3.\ell$