

MP 2024-2025 **DS N°3** **Corrigé**
Système mobile d'imagerie Discovery IGS 730 (D'après CCP - MP - 2017)

Partie 2.1 – Modélisation géométrique et cinématique de l'AGV

Question 1

D'après la relation de Varignon : $\vec{V}_{A \in \text{Roue}/R0} = \vec{V}_{I \in \text{Roue}/R0} + \vec{AI} \wedge \vec{\Omega}_{\text{Roue}/R0}$

Or du fait du roulement sans glissement au point I de la roue sur le sol : $\vec{V}_{I \in \text{Roue}/R0} = \vec{0}$

D'autre part A étant le centre de la liaison pivot entre la roue et le cadre : $\vec{V}_{A \in \text{Roue}/R0} = \vec{V}_{A \in \text{Cadre}/R0}$

On a donc : $\vec{V}_{A \in \text{Cadre}/R0} = \vec{AI} \wedge \vec{\Omega}_{\text{Roue}/R0} = -r \cdot \vec{z}_0 \wedge \theta_D \cdot \vec{y}_P$ Soit : $\vec{V}_{A \in \text{Cadre}/R0} = r \cdot \theta_D \cdot \vec{x}_P$

Question 2

On a : $\vec{IA} = \frac{e}{2} \cdot \vec{x}_C + a \cdot \vec{y}_C$ Donc : $\vec{IA} \cdot \vec{V}_{A \in \text{Cadre}/R0} = \left(\frac{e}{2} \cdot \vec{x}_C + a \cdot \vec{y}_C \right) \cdot r \cdot \theta_D \cdot \vec{x}_P$

$$\vec{IA} \cdot \vec{V}_{A \in \text{Cadre}/R0} = \frac{e}{2} \cdot r \cdot \theta_D \cdot \cos \beta + a \cdot r \cdot \theta_D \cdot \sin \beta$$

Sachant que : $\vec{IA} \cdot \vec{V}_{A \in \text{Cadre}/R0} = 0$ On a : $\tan \beta = \frac{-e}{2 \cdot a}$ $\beta = \arctan\left(\frac{-800}{2 \times 1440}\right) = -15,5241^\circ$

Question 3

Si l'isocentre I_C est sur l'axe de rotation (A, \vec{y}_P) alors : $\vec{I_C A} \cdot \vec{V}_{A \in \text{Cadre}/R0} = 0$ car $\vec{V}_{A \in \text{Cadre}/R0} // \vec{x}_P$.

On en déduit donc : $\tan(\beta + \Delta\beta) = \frac{-e}{2 \cdot (a - \Delta y)}$ $\Rightarrow \Delta y = a + \frac{e}{2 \cdot \tan(\beta + \Delta\beta)}$

Applications numérique : $\Delta\beta = +10^{-3} \text{ deg} \Rightarrow \Delta y = 1440 + \frac{800}{2 \cdot \tan -15,5231^\circ} = -0,099 \text{ mm}$

$\Delta\beta = -10^{-3} \text{ deg} \Rightarrow \Delta y = 1440 + \frac{800}{2 \cdot \tan -15,5251^\circ} = -0,096 \text{ mm}$

On en déduit donc que pour : $\Delta\beta = \pm 10^{-3} \text{ deg}$ on a : $\Delta y \approx \pm 0,1 \text{ mm}$

Etant donné que $\Delta y < \pm 0,5 \text{ mm}$, l'exigence Id 1.1.2.1 est respectée.

Partie 2.2 – Performances de l'asservissement en vitesse de translation de l'AGV

Fonction de transfert d'un moteur

Question 4

Les conditions initiales étant nulles, les transformées de Laplace des équations (1) à (4) sont :

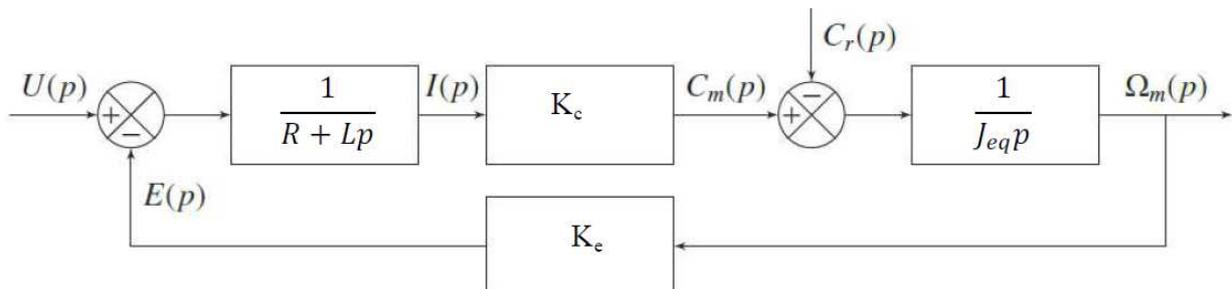
(1) $\Rightarrow \mathbf{U(p) - E(p) = (R + L \cdot p) \cdot I(p)}$

(2) $\Rightarrow \mathbf{C_m(p) = K_c \cdot I(p)}$

(3) $\Rightarrow \mathbf{E(p) = K_e \cdot \Omega_m(p)}$

(4) $\Rightarrow \mathbf{C_m(p) - C_r(p) = J_{eq} \cdot p \cdot \Omega_m(p)}$

On en déduit le schéma bloc du moteur :



Question 5

On en déduit les fonctions de transfert du moteur : $H_1(p) = \frac{\Omega_m(p)}{U(p)} \Big|_{C_r(p)=0}$ et : $H_2(p) = \frac{\Omega_m(p)}{C_r(p)} \Big|_{U(p)=0}$

$$H_1(p) = \frac{\frac{K_c}{(R + L \cdot p) \cdot J_{eq} \cdot p}}{1 + \frac{K_c \cdot K_e}{(R + L \cdot p) \cdot J_{eq} \cdot p}} \quad \text{On en déduit : } H_1(p) = \frac{\frac{1}{K_e}}{1 + \frac{R \cdot J_{eq}}{K_c \cdot K_e} \cdot p + \frac{L \cdot J_{eq}}{K_c \cdot K_e} \cdot p^2}$$

$$H_2(p) = \frac{-\frac{1}{J_{eq} \cdot p}}{1 + \frac{K_c \cdot K_e}{(R + L \cdot p) \cdot J_{eq} \cdot p}} \quad \text{On en déduit : } H_2(p) = -\frac{\frac{R}{K_c \cdot K_e} \cdot \left(1 + \frac{L}{R} \cdot p\right)}{1 + \frac{R \cdot J_{eq}}{K_c \cdot K_e} \cdot p + \frac{L \cdot J_{eq}}{K_c \cdot K_e} \cdot p^2}$$

On en déduit par le principe de superposition :

$$\Omega_m(p) = H_1(p) \cdot U(p) + H_2(p) \cdot C_r(p) = \frac{\frac{1}{K_e}}{1 + \frac{R \cdot J_{eq}}{K_c \cdot K_e} \cdot p + \frac{L \cdot J_{eq}}{K_c \cdot K_e} \cdot p^2} \cdot U(p) - \frac{\frac{R}{K_c \cdot K_e} \cdot \left(1 + \frac{L}{R} \cdot p\right)}{1 + \frac{R \cdot J_{eq}}{K_c \cdot K_e} \cdot p + \frac{L \cdot J_{eq}}{K_c \cdot K_e} \cdot p^2} \cdot C_r(p)$$

Question 6

Application numérique en l'absence de perturbation :

$$H(p) = H_1(p) = \frac{\frac{1}{0,113}}{1 + \frac{0,07 \times 5,3 \cdot 10^{-3}}{0,113 \times 0,113} \cdot p + \frac{0,15 \cdot 10^{-3} \times 5,3 \cdot 10^{-3}}{0,113 \times 0,113} \cdot p^2} = \frac{8,85}{1 + 0,0291 \cdot p + 6,23 \cdot 10^{-5} \cdot p^2} \text{ rad.s}^{-1} \cdot \text{V}^{-1}$$

Fonction de transfert du 2nd ordre avec : $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{6,23 \cdot 10^{-5}}} = 127 \text{ rad.s}^{-1}$ Et : $\xi = \frac{127}{2} \cdot 0,0291 = 1,85$

Etant que le facteur d'amortissement est supérieur à 1 cette fonction de transfert peut s'écrire :

$$H(p) = \frac{K}{(1 + \tau_1 \cdot p) \cdot (1 + \tau_2 \cdot p)} \text{ avec : } \begin{cases} \tau_1 \cdot \tau_2 = 6,23 \cdot 10^{-5} \\ \tau_1 + \tau_2 = 0,0291 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \tau_1 = 0,0268 \text{ s} \\ \tau_2 = 2,33 \cdot 10^{-3} \text{ s} \end{cases}$$

Donc : $H(p) = \frac{K}{(1 + \tau_1 \cdot p) \cdot (1 + \tau_2 \cdot p)}$ avec : $K = 8,85 \text{ rad.s}^{-1} \cdot \text{V}^{-1}$ $\tau_1 = 26,8 \text{ ms}$ $\tau_2 = 2,33 \text{ ms}$

Asservissement en vitesse de la base motorisée

Question 7

Du roulement sans glissement de la roue sur le sol on a : $v(t) = r \cdot \omega_{roue}(t)$ avec : $\omega_{roue}(t) = k_1 \cdot k_2 \cdot \omega_m(t)$

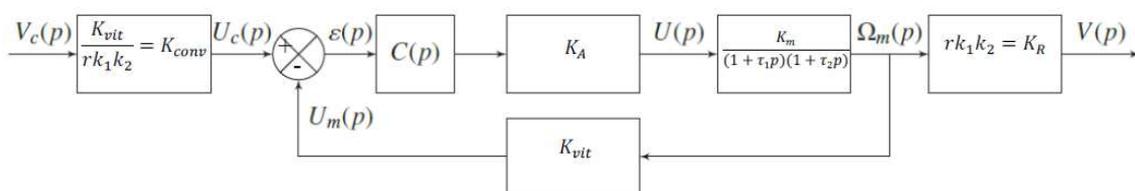
Donc : $K_R = r \cdot k_1 \cdot k_2$ $K_R = 0,115 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{28,9}$ $K_R = 9,95 \cdot 10^{-4} \text{ m.rad}^{-1}$

D'autre part pour avoir $\varepsilon(t) = 0$ pour $v(t) = v_c(t)$ il faut avoir :

$$K_{conv} = \frac{K_{vit}}{r \cdot k_1 \cdot k_2} \quad K_{conv} = \frac{1,4 \cdot 10^{-3}}{9,95 \cdot 10^{-4}} \quad K_{conv} = 1,41 \text{ V.s.m}^{-1}$$

Question 7

On en déduit le schéma bloc de l'asservissement :



Etude du système non corrigé C(p) = 1

Question 9

Du schéma bloc, on en déduit que pour C(p) = 1 la FTBO est : $\frac{K_A \cdot K_m \cdot K_{vit}}{(1 + \tau_1 \cdot p) \cdot (1 + \tau_2 \cdot p)}$ soit une FTBF :

$$H(p) = \frac{\frac{K_A \cdot K_m \cdot K_{vit}}{(1 + \tau_1 \cdot p) \cdot (1 + \tau_2 \cdot p)}}{1 + \frac{K_A \cdot K_m \cdot K_{vit}}{(1 + \tau_1 \cdot p) \cdot (1 + \tau_2 \cdot p)}}$$

$$H(p) = \frac{\frac{K_A \cdot K_m \cdot K_{vit}}{1 + K_A \cdot K_m \cdot K_{vit}}}{1 + \frac{\tau_1 + \tau_2}{1 + K_A \cdot K_m \cdot K_{vit}} \cdot p + \frac{\tau_1 \cdot \tau_2}{1 + K_A \cdot K_m \cdot K_{vit}}} = \frac{K}{1 + \frac{2 \cdot \xi}{\omega_0} \cdot p + \frac{1}{\omega_0^2} \cdot p^2}$$

Par identification on en déduit les éléments caractéristiques de cette fonction de transfert du 2nd ordre :

$$K = \frac{K_A \cdot K_m \cdot K_{vit}}{1 + K_A \cdot K_m \cdot K_{vit}}$$

$$K = \frac{7,9 \times 8,85 \times 1,4 \cdot 10^{-3}}{1 + 7,9 \times 8,85 \times 1,4 \cdot 10^{-3}}$$

$$K = 8,92 \cdot 10^{-2}$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1 + K_A \cdot K_m \cdot K_{vit}}{\tau_1 \cdot \tau_2}}$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1 + 7,9 \times 8,85 \times 1,4 \cdot 10^{-3}}{0,027 \times 0,0023}}$$

$$\omega_0 = 133 \text{ rad.s}^{-1}$$

$$\xi = \frac{\omega_0}{2} \cdot \frac{\tau_1 + \tau_2}{1 + K_A \cdot K_m \cdot K_{vit}}$$

$$\xi = \frac{133}{2} \cdot \frac{0,027 + 0,0023}{1 + 7,9 \times 8,85 \times 1,4 \cdot 10^{-3}}$$

$$\xi = 1,77$$

Question 10

Etant donné que le facteur d'amortissement est supérieur à 1, la FTBF peut s'écrire : $\frac{K_{BF}}{(1 + T_1 \cdot p) \cdot (1 + T_2 \cdot p)}$

Cette FTBF a donc deux pôles réels et donc peut être approximée à une fonction de transfert du premier ordre correspondant au mode dominant : $\frac{K_{BF}}{1 + T_d \cdot p}$ avec $T_d = \max(T_1, T_2)$ or la réponse de cette fonction de

transfert à un échelon à une pente maximale pour t = 0 de valeur $a_{max} = \frac{V_{max}}{T_d}$ avec $T_d = \frac{t_{5\%}}{3}$

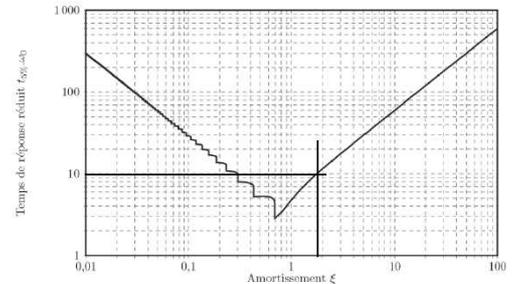
Donc l'accélération maximale peut être approchée par $a_{max} = \frac{3 \cdot V_{max}}{t_{5\%}}$

Question 11

Sachant que $\xi = 1,77$, l'abaque du document réponse DR3 nous donne : $t_{5\%} \cdot \omega_0 = 10$. On en déduit :

$$t_{5\%} = \frac{10}{\omega_0} = \frac{10}{133} = 0,0752 \text{ s} \quad \text{soit :} \quad t_{5\%} = 75,2 \text{ ms}$$

l'exigence Id 1.1.3.1.1 impose que l'on puisse atteindre une vitesse de $0,3 \text{ m.s}^{-1}$ sans dépasser une accélération de $0,8 \text{ m.s}^{-2}$.



Avec l'approximation de la question 10 on en déduit une accélération maximale de : $\frac{3 \times 0,3}{0,0752} = 12 \text{ m.s}^{-2}$

bien supérieure aux $0,8 \text{ m.s}^{-2}$ exigées.

Ce temps de réponse n'est donc pas satisfaisant vis-à-vis de l'exigence Id 1.1.3.1.1. Pour satisfaire à cette exigence il faudrait pour la consigne avoir un trapèze de vitesse.

Question 12

L'erreur en régime permanent est égale à $\epsilon_s = 1 - K = 1 - 8,92 \cdot 10^{-2} = 0,91 = 91 \%$.

Le système non corrigé ne satisfait donc pas à l'exigence Id 1.1.3.2.1 qui impose une erreur nulle.

Remarque : L'erreur est vraiment très importante, cela est dû au fait qu'on étudie un système non corrigé.

Pour respecter cette exigence il faut introduire un intégrateur dans la FTBO qui n'en contient pas si le système n'est pas corrigé. Il faut donc pour cela utiliser un correcteur avec un intégrateur

Etude du système corrigé : $C(p) = K_p \cdot \left(1 + \frac{1}{T_i \cdot p}\right)$

Question 13

Du schéma bloc, on en déduit que pour $C(p) = K_p \cdot \left(1 + \frac{1}{T_i \cdot p}\right)$ la FTBO s'écrit est :

$$H_{BO}(p) = K_p \cdot \left(1 + \frac{1}{T_i \cdot p}\right) \frac{K_A \cdot K_m \cdot K_{vit}}{(1 + \tau_1 \cdot p) \cdot (1 + \tau_2 \cdot p)} = \frac{K_A \cdot K_m \cdot K_{vit} \cdot K_p \cdot (1 + T_i \cdot p)}{T_i \cdot p \cdot (1 + \tau_1 \cdot p) \cdot (1 + \tau_2 \cdot p)}$$

Donc : $H_{BO}(p) = \frac{K_{BO} \cdot (1 + T_i \cdot p)}{p(1 + \tau_1 \cdot p) \cdot (1 + \tau_2 \cdot p)}$ avec : $K_{BO} = \frac{K_A \cdot K_m \cdot K_{vit} \cdot K_p}{T_i}$

Question 14

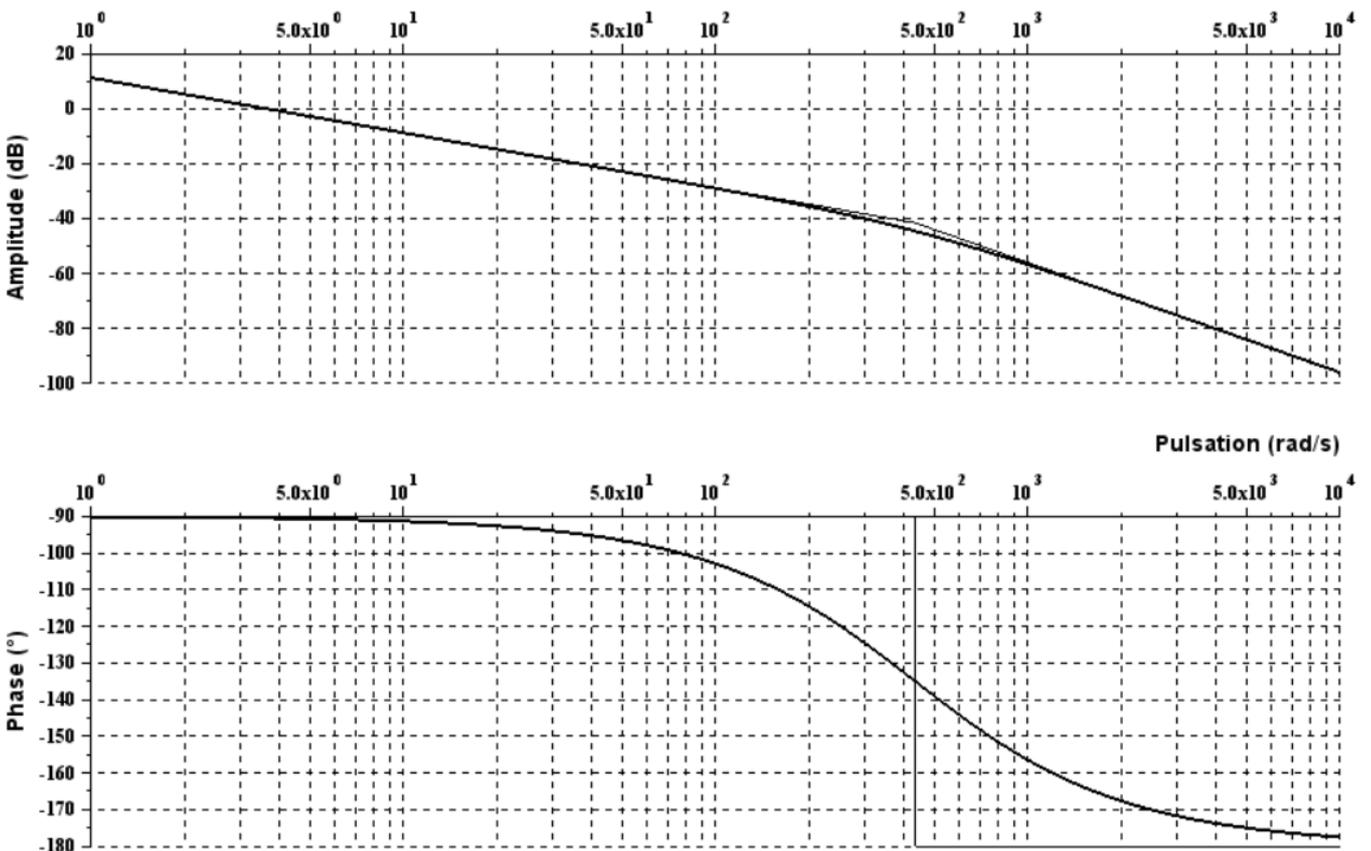
Le « mode le plus lent » correspond à la plus grande constante de temps τ_1 . Donc si on choisit T_i pour compenser ce mode le plus alors on choisit : $T_i = \tau_1 = 0,027 \text{ s}$

Question 15

Ce correcteur qui a un intégrateur introduit un intégrateur dans la FTBO. Ainsi l'erreur est nulle.

Donc ce correcteur permet de répondre à l'exigence de précision.

Avec $K_p = 1$ la FTBO s'écrit : $H_{BO}(p) = \frac{3,7}{p \cdot (1 + 0,0023 \cdot p)}$ On en déduit les diagrammes de Bode :



L'exigence de stabilité impose une marge de phase de 45°. Soit un gain de la FTBO nul lorsque la phase est de -135°. Or cette phase est obtenue à la pulsation $\omega_{0dB} = \frac{1}{0,0023} = 435 \text{ rad.s}^{-1}$.

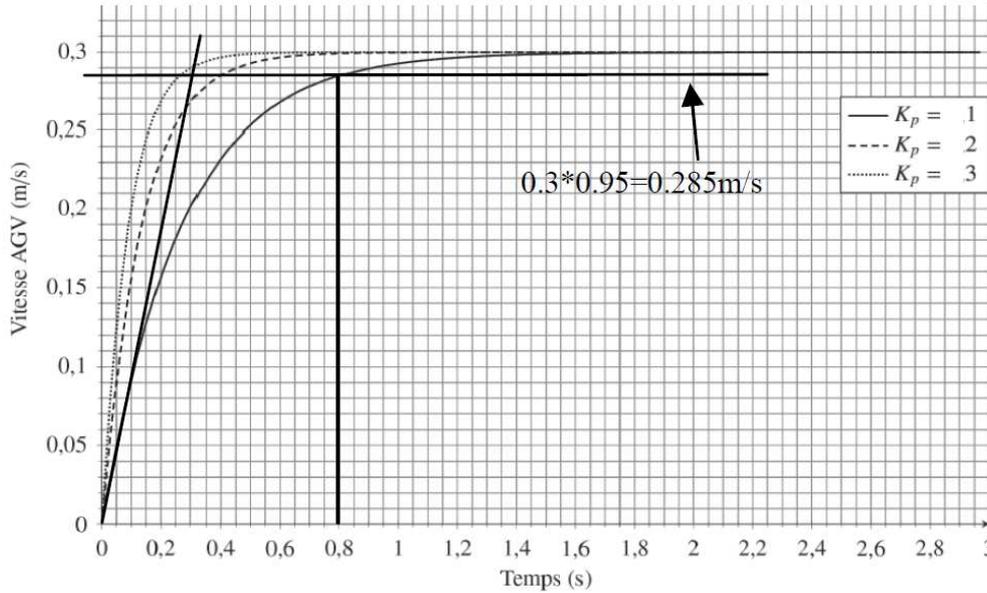
Or le gain dynamique à cette pulsation est de : $20 \cdot \log K_p + 20 \cdot \log 3,7 - 20 \cdot \log \omega_{0dB} - 10 \cdot \log 2$. On doit donc avoir : $20 \cdot \log K_p = 10 \cdot \log 2 + 20 \cdot \log 435 - 20 \cdot \log 3,7 = 44,4 \text{ dB}$ Soit : $K_p = 10^{(44,4/20)} = 166 \text{ s}^{-1}$

Donc pour respecter l'exigence de stabilité en étant le plus rapide, il faut : $K_p = 166 \text{ s}^{-1}$

Question 16

Dans les trois cas $K_p < 166$. Donc l'exigence de stabilité est satisfaite.

En regardant la pente maximale de $v(t)$ on obtient a_{max} . On peut aussi déterminer le temps de réponse à 5% (Voir tracé ci-dessous pour $K_p = 1$ uniquement)



$$K_p = 1 \left| \begin{array}{l} t_{5\%} = 0,8 \text{ s} \\ a_{max} = \frac{0,3}{0,32} = 0,94 \text{ m.s}^{-2} \end{array} \right. \quad K_p = 2 \left| \begin{array}{l} t_{5\%} = 0,4 \text{ s} \\ a_{max} = \frac{0,3}{0,15} = 2 \text{ m.s}^{-2} \end{array} \right. \quad K_p = 3 \left| \begin{array}{l} t_{5\%} = 0,25 \text{ s} \\ a_{max} = \frac{0,3}{0,1} = 3 \text{ m.s}^{-2} \end{array} \right.$$

Aucune des trois valeurs de K_p ne correspond car on a toujours $a_{max} > 0,8$. Une simulation montre qu'il faut une valeur de $K_p = 0,8$ pour respecter cette exigence de rapidité sur l'accélération.

Question 17

Les valeurs en régime permanent sont identiques sur le système réel et sur le système simulé, l'erreur en régime permanent est bien nulle.

Le temps de réponse à 5% est plus faible pour le système simulé ($t_{5\%} \approx 0,38 \text{ s}$) que pour le système réel ($t_{5\%} \approx 0,5 \text{ s}$). Cette différence peut s'expliquer par la non prise en compte du couple résistant dans la simulation.

Pour la simulation et pour le réel, l'accélération dépasse la valeur limite du cahier des charges $0,8 \text{ m.s}^{-2}$, ($1,2 \text{ m.s}^{-2}$, pour le réel et $1,5 \text{ m.s}^{-2}$, pour la simulation).

La courbe réelle est légèrement bruitée.

Partie 2.3 – Localisation de l'AGV : Estimation de la position

Question 18

```
def position_odometrie(delta_d,delta_g,p0):
    delta_teta=r*(delta_d-delta_g)/e
    delta_x=r*(delta_d+delta_g)*cos(p0[2]+delta_teta/2)/2
    delta_y=r*(delta_d+delta_g)*sin(p0[2]+delta_teta/2)/2
    return array([p0[0]+delta_x,p0[1]+delta_y,p0[2]+delta_teta])
```

Question 19

```
def calcul_sigma_2(mat_sigmap,mat_jacob):
    return dot(dot(mat_jacob,mat_sigmap),transpose(mat_jacob))
```

Question 20

D'après la figure 9 on a : $r_i = \sqrt{(x_i - x)^2 + (y_i - y)^2}$ et : $\tan\left(\theta - \frac{\pi}{2} + \varphi_i\right) = \frac{y_i - y}{x_i - x}$

Donc :

$$\begin{aligned} \text{si } x_i - x > 0 &\Rightarrow \theta - \frac{\pi}{2} + \varphi_i = \arctan\left(\frac{y_i - y}{x_i - x}\right) &\Rightarrow \varphi_i = \arctan\left(\frac{y_i - y}{x_i - x}\right) + \frac{\pi}{2} - \theta \\ \text{si } x_i - x < 0 &\Rightarrow \theta - \frac{\pi}{2} + \varphi_i = \arctan\left(\frac{y_i - y}{x_i - x}\right) + \pi &\Rightarrow \varphi_i = \arctan\left(\frac{y_i - y}{x_i - x}\right) + \frac{3\pi}{2} - \theta \\ \text{si } x_i - x = 0 &\Rightarrow \text{si } y_i - y > 0 &\Rightarrow \theta - \frac{\pi}{2} + \varphi_i = \frac{\pi}{2} &\Rightarrow \varphi_i = \pi - \theta \\ &\text{si } y_i - y < 0 &\Rightarrow \theta - \frac{\pi}{2} + \varphi_i = -\frac{\pi}{2} &\Rightarrow \varphi_i = -\theta \end{aligned}$$

Remarque : Dans le cas où la cible est à la verticale de P ($x_i - x = 0$ et $y_i - y = 0$) on prendra $\varphi_i = 0$

def global_local(xi, yi, p1) :

```
ri=sqrt((xi-p1[0])**2+(yi-p1[1])**2)
if xi==p1[0] :
    if (yi-p1[1]>0) : phii=pi-p1[2]
    elif (yi-p1[1]<0) : phii=-p1[2]
    else : phii=0
elif (xi-p1[0]>0) : phii=atan((yi-p1[1])/(xi-p1[0]))+pi/2-p1[2]
else : phii=atan((yi-p1[1])/(xi-p1[0]))+3*pi/2-p1[2]
return [ri,phii]
```

Question 21

def prediction(p1, cible_map) :

```
n=len(cible_map)
zpred=zeros((n,2))
for i in range(n) :
    zpred[i]=global_local(cible_map[0],cible_map[1],p1)
return zpred
```

Question 22

Dans un triangle quelconque C_iPC_j on a la relation $C_iC_j^2 = PC_i^2 + PC_j^2 - 2.PC_i.PC_j.\cos(\widehat{C_iPC_j})$

Or : $C_iC_j = d_{ij}$ $PC_i = r_i$ $PC_j = r_j$ et : $\widehat{C_iPC_j} = \varphi_j - \varphi_i$

On obtient donc : $d_{ij} = \sqrt{r_i^2 + r_j^2 - 2.r_i.r_j.\cos(\varphi_j - \varphi_i)}$

Question 23 et question 24(2 dernière lignes)

def comparaison(zi, zpred) :

```
n=len(zpred)
dm2=zj[0]**2+zpred[0,0]**2-2*zj[0]*zpred[0,0]*cos(zj[1]-zpred[0,1])
indicem=
for i in range(1,n):
    d2=zj[0]**2+zpred[i,0]**2-2*zj[0]*zpred[i,0]*cos(zj[1]-zpred[i,1])
    if d2<dm2 : dm2,indicem=d2,i
if dm2<=dmax**2:
    return array(zj[0]-zpred[indicem,0],zj[1]-zpred[indicem,1])
```

Partie 3 – Exigence de sécurité lors d'une procédure de freinage

Question 25

On isole l'ensemble Σ . Les actions mécaniques extérieures s'appliquant sur le système sont :

- ☞ Le poids de Σ : $\{T_{pes \rightarrow \Sigma}\}$
- ☞ L'action de 0 → 1 : $\{T_{0 \rightarrow 1}\}$
- ☞ L'action de 0 → 2 : $\{T_{0 \rightarrow 2}\}$

L'application du théorème de la résultante dynamique en projection sur \vec{x} donne :

$$m_{\Sigma} \cdot \Gamma_{\Sigma/R} \cdot \vec{x} = F_{pes \rightarrow \Sigma} \cdot \vec{x} + F_{0 \rightarrow 1} \cdot \vec{x} + F_{0 \rightarrow 2} \cdot \vec{x} \Rightarrow -m_{\Sigma} \cdot \gamma = 0 - X_{01} + 0 \Rightarrow \mathbf{X_{01} = m_{\Sigma} \cdot \gamma}$$

Question 26

On isole la roue motrice 1. Les actions mécaniques extérieures s'appliquant sur cette roue sont :

- ☞ L'action de 3 → 1 : $\{T_{3 \rightarrow 1}\}$
- ☞ L'action de 0 → 1 due à la liaison pivot parfaite d'axe (A, \vec{y}) entre 3 et 1 : $\{T_{0 \rightarrow 1}\}$
- ☞ L'action de freinage : $\{T_{frein \rightarrow 1}\}$

L'application du théorème du moment dynamique par rapport à l'axe (A, \vec{y}) donne :

$$J \cdot \ddot{\theta}_R = 0 + \overline{AI_1} \wedge F_{0 \rightarrow 1} \cdot \vec{y} - C_f \cdot \vec{y} \Rightarrow C_f = J \cdot \ddot{\theta}_R - r \cdot \vec{z} \wedge (-X_{01} \cdot \vec{x} + Z_{01} \cdot \vec{z}) \cdot \vec{y}$$

Soit : $C_f = J \cdot \ddot{\theta}_R + r \cdot X_{01}$ Or : $X_{01} = m_{\Sigma} \cdot \gamma$ Et : $\ddot{\theta}_R = \frac{\gamma}{r}$ Donc : $\mathbf{C_f = \left(\frac{J}{r} + m_{\Sigma} \cdot r\right) \cdot \gamma}$

Question 27

Le terme J étant négligé devant $m_{\Sigma} \cdot r^2, \frac{J}{r} \ll m_{\Sigma} \cdot r$ Donc : $\mathbf{C_f = m_{\Sigma} \cdot r \cdot \gamma}$

Question 28

L'ensemble Σ étant en translation (On néglige l'inertie des roues) on a : $\delta_G(\Sigma/R) = \vec{0}$

Par la relation de Varignon appliquée aux moments dynamique de Σ par rapport à R on obtient :

$$\delta_{I_2}(\Sigma/R) = \overline{I_2G} \wedge m_{\Sigma} \cdot \Gamma_{\Sigma/R} = \overline{I_2I_1} + \overline{I_1G} = [(-\ell + x_G) \cdot \vec{x} + z_G \cdot \vec{z}] \wedge -m_{\Sigma} \cdot \gamma \cdot \vec{x}$$

Soit : $\mathbf{\delta_{I_2}(\Sigma/R) = -m_{\Sigma} \cdot \gamma \cdot z_G \cdot \vec{y}}$

Question 29

On isole l'ensemble Σ . Les actions mécaniques extérieures s'appliquant sur le système sont :

- ☞ Le poids de Σ : $\{T_{pes \rightarrow \Sigma}\}$
- ☞ L'action de 0 → 1 : $\{T_{0 \rightarrow 1}\}$
- ☞ L'action de 0 → 2 : $\{T_{0 \rightarrow 2}\}$

L'application du théorème du moment dynamique par rapport à l'axe (I_2, \vec{y}) donne :

$$\delta_{I_2}(\Sigma/R) \cdot \vec{y} = \overline{I_2G} \wedge F_{pes \rightarrow \Sigma} \cdot \vec{y} + \overline{I_2I_1} \wedge F_{0 \rightarrow 1} \cdot \vec{y} + 0 - m_{\Sigma} \cdot \gamma \cdot z_G = [(-\ell + x_G) \cdot \vec{x} + z_G \cdot \vec{z}] \wedge -m_{\Sigma} \cdot g \cdot \vec{z} \cdot \vec{y} - \ell \cdot \vec{x} \wedge (-X_{01} \cdot \vec{x} + Z_{01} \cdot \vec{z}) \cdot \vec{y}$$

Soit : $\mathbf{-m_{\Sigma} \cdot \gamma \cdot z_G = m_{\Sigma} \cdot g \cdot (-\ell + x_G) + \ell \cdot Z_{01}}$

La décélération limite de non basculement (pour laquelle $Z_{01} = 0$) est donc : $\mathbf{\gamma_{NB,1} = g \cdot \frac{\ell - x_G}{z_G}}$

Application numérique : $\gamma_{NB,1} = 9,81 \cdot \frac{1 - 0,45}{0,95} \Rightarrow \mathbf{\gamma_{NB,1} = 5,68 \text{ m.s}^{-2}}$

Question 30

De l'équation des moments dynamique de Σ par rapport à R (Question 29) on obtient :

$$Z_{01} = \frac{m_{\Sigma} \cdot [g \cdot (\ell - x_G) - \gamma \cdot z_G]}{\ell} \quad \text{D'autre part (Question 25) : } X_{01} = m_{\Sigma} \cdot \gamma \quad \text{Donc : } \frac{X_{01}}{Z_{01}} = \frac{\ell \cdot \gamma}{g \cdot (\ell - x_G) - \gamma \cdot z_G}$$

$$\text{Or à la limite du glissement on a : } \gamma = \gamma_{NG,1} \text{ et } \frac{X_{01}}{Z_{01}} = -\mu \quad \Rightarrow \quad \gamma_{NG,1} = g \cdot \frac{\mu \cdot (\ell - x_G)}{\ell - \mu \cdot z_G}$$

$$\text{Application numérique : } \gamma_{NG,1} = 9,81 \cdot \frac{0,5 \cdot (1 - 0,45)}{1 - 0,5 \times 0,9 + 5} \quad \Rightarrow \quad \gamma_{NG,1} = 5,14 \text{ m.s}^{-2}$$

Question 31

La valeur limite de décélération est donc la valeur minimale des quatre valeurs obtenues précédemment.

Pour satisfaire à l'exigence de sécurité lors d'un mouvement de translation du système il faut donc limiter la décélération à une valeur de $4,5 \text{ m.s}^{-2}$.