

Corrigé

Document-réponses

Question 1 Compléter sur la figure R1 le chronogramme indiquant les états successifs de l'EXCM-30.

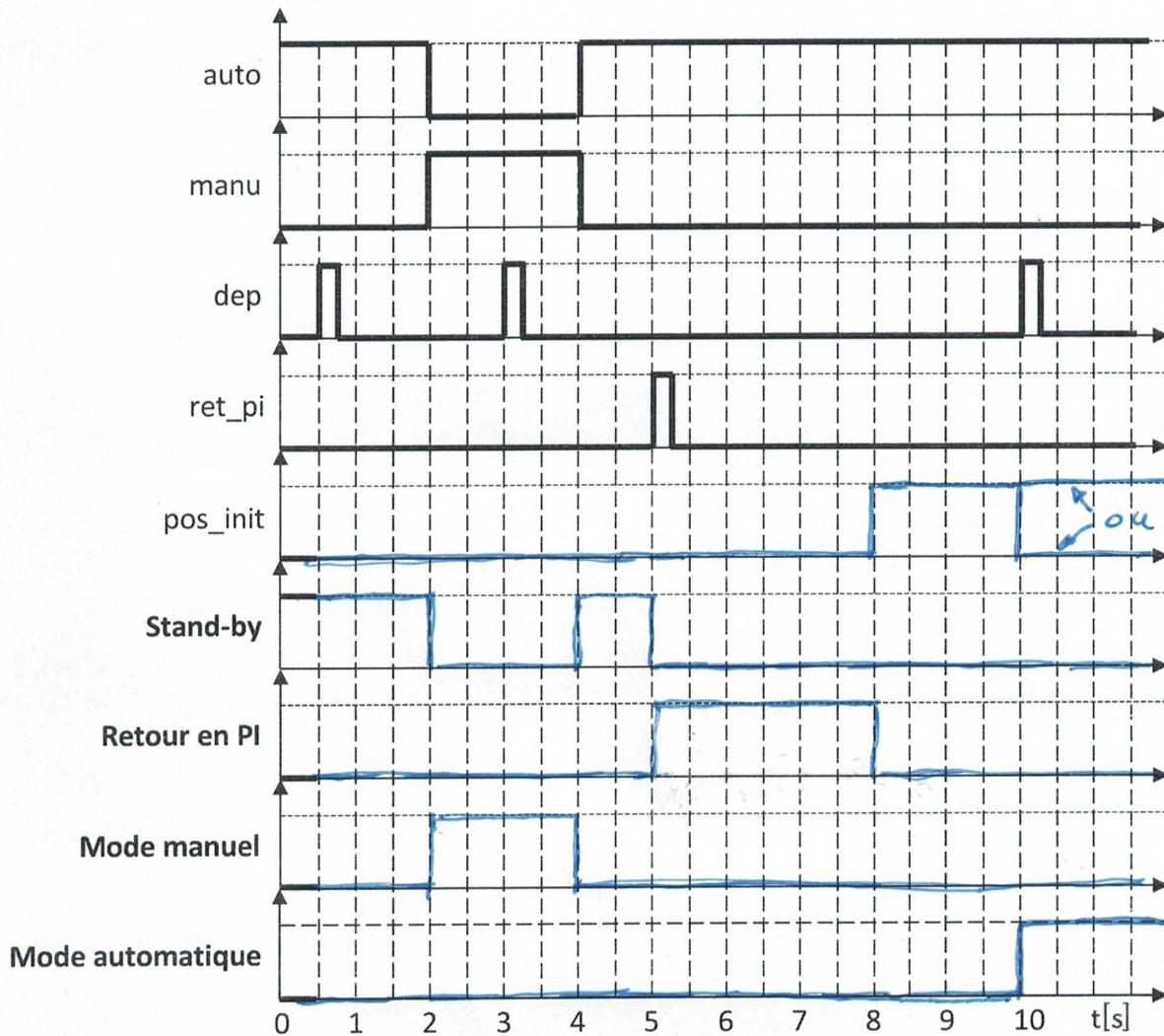


Figure R1 : chronogramme à compléter

Conclure quant au respect de l'exigence 1.2.2.1 du cahier des charges.

Le cahier des charges est bien respecté car le mode auto n'est actif que si le manipulateur est en condition initiale

Question 2 Établir la relation entre $\Delta\theta_1, R_p, \Delta l x_1$ et $\Delta l y_1$ et la relation entre $\Delta\theta_2, R_p, \Delta l x_2$ et $\Delta l y_2$.

Si la poulie P1 tourne d'un angle $\Delta\theta_1$ alors la portion AD de la courroie s'allonge de $\Delta\theta_1 \cdot R_p$

On a donc $\Delta\theta_1 \cdot R_p = l_{x1} + l_{y1}$

De même si la poulie P2 tourne d'un angle $\Delta\theta_2$ alors la portion LI s'allonge de $-\Delta\theta_2 \cdot R_p$ donc $-\Delta\theta_2 \cdot R_p = l_{x2} + l_{y2}$

Question 3 Établir les quatre équations de contrainte géométrique entre les variations de longueur Δl_i .
Le schéma de l'annexe 1 montre que:

(a): $\Delta l_{x1} + \Delta l_{x3} = 0$

(c): $\Delta l_{x1} - \Delta l_{x2} = 0$

(b): $\Delta l_{x2} + \Delta l_{x4} = 0$

Remarque: On donne ici 5 équations mais elles ne sont pas

(d): $\Delta l_{y1} + \Delta l_{y2} = 0$

indépendantes: (e) = (a) - (b) - (d)

(e): $\Delta l_{x3} - \Delta l_{x4} = 0$

Question 4 Exprimer les variations de longueur Δl_{x2} et Δl_{y2} en fonction de R_p , $\Delta\theta_1$ et $\Delta\theta_2$.

Par la somme des 2 équations de la question 2 on obtient:

$R_p(\Delta\theta_1 - \Delta\theta_2) = l_{x1} + l_{x2} + l_{y1} + l_{y2}$ or de (d) $l_{y1} + l_{y2} = 0$ et de (e) $\Delta l_{x1} = \Delta l_{x2}$ on obtient donc: $\Delta l_{x2} = \frac{R_p(\Delta\theta_1 - \Delta\theta_2)}{2}$

Par la différence des équations de la question 2 on obtient

$R_p(\Delta\theta_1 + \Delta\theta_2) = \Delta l_{x1} - \Delta l_{x2} + \Delta l_{y1} - \Delta l_{y2}$ de (c) et (d) $\Delta l_{y2} = \frac{-R_p(\Delta\theta_1 + \Delta\theta_2)}{2}$

Question 5 Exprimer les consignes articulaires $\Delta\theta_1$ et $\Delta\theta_2$ en fonction de Δl_{x2} et Δl_{y2} .

En sommant ces 2 équations: $\Delta\theta_2 = \frac{-(\Delta l_{x2} + \Delta l_{y2})}{R_p}$

Et par soustraction:

$\Delta\theta_1 = \frac{\Delta l_{x2} - \Delta l_{y2}}{R_p}$

Question 6 Indiquer quel(s) moteur(s) doit/doivent tourner pour obtenir un déplacement longitudinal du chariot caractérisé par: $\Delta l_{x2} > 0$ et $\Delta l_{y2} = 0$. Le cas échéant, préciser le sens de rotation.

Moteur	Rotation (oui/non)	Sens (+/-)
M1	non	—
M2	oui	—

Question 7

À partir de la position du chariot, représenter à l'aide de flèches sur la figure R2 la trajectoire que doit prendre le chariot pour rejoindre la position initiale.

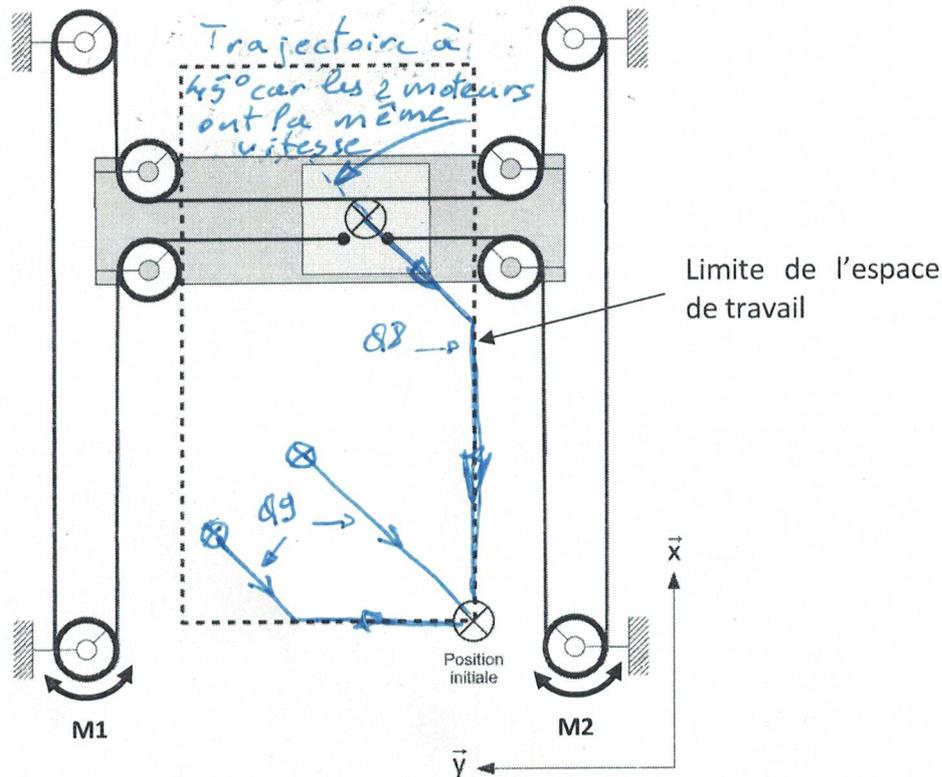


Figure R2 : trajectoires de retour en position initiale

Question 8

En analysant le processus décrit figure 6, ajouter sur la figure R2 du document-réponses les autres trajectoires possibles de retour en position initiale.

Question 9

Pour le cas 2 (figure 10), déterminer, en justifiant la démarche utilisée, l'expression de la raideur k (cas 1) en fonction de k_1 et k_2 qui donnerait un déplacement identique $x(t)$ de la masse m pour un même effort F .

Pour le cas 1 $F = kx \Rightarrow x = \frac{F}{k}$

Pour le cas 2 $F = k_1 x_1 \Rightarrow x_1 = \frac{F}{k_1}$

et $F = k_2 (x - x_1)$

Donc $F = k_2 \left(\frac{F}{k} - \frac{F}{k_1} \right) \Leftrightarrow k k_1 = k_2 k_1 - k_2 k$

$\Leftrightarrow k (k_1 + k_2) = k_2 k_1$ soit finalement $k = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2}$

Procéder de même pour le cas 3.

Pour le cas 1 $F = kx$

Pour le cas 3 $F = k_1 x + k_2 x = (k_1 + k_2) x$

On a donc directement $k = k_1 + k_2$

Question 10 Justifier que les ressorts k_2 et k_3 (figure 8) sont en série. Préciser le(s) solide(s) isolé(s), les actions mécaniques prises en compte, les hypothèses effectuées, le théorème utilisé.

En isolant la poulie réceptrice et en lui appliquant un TMD (ou TMS) au point H en projection sur \vec{j} on obtient

$$R_p \parallel \vec{R}_{k_2 \rightarrow PR} = R_p \parallel \vec{R}_{k_3 \rightarrow PR}$$

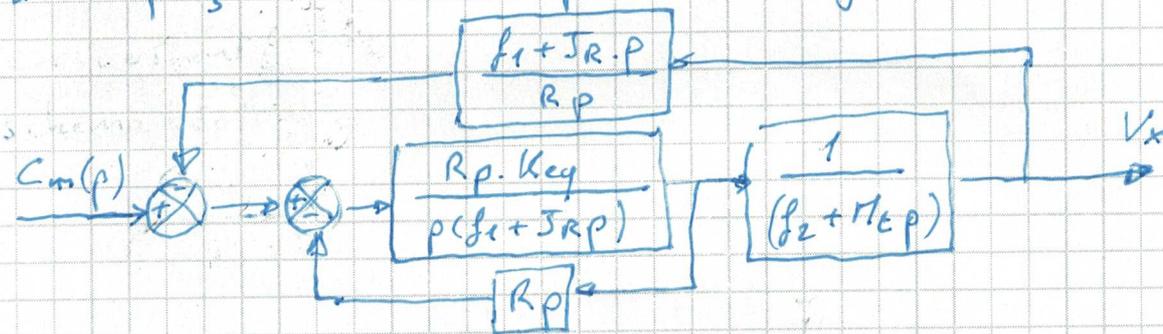
Soit $\parallel \vec{R}_{k_2 \rightarrow PR} = \parallel \vec{R}_{k_3 \rightarrow PR}$ comme pour le cas 2 les deux ressorts sont en série

Question 11 En déduire la raideur équivalente K_{eq} de l'ensemble poulies-courroie.

On a donc en parallèle le ressort k_1 et le ressort équivalent aux 2 ressorts en série k_2 et k_3 D'où :

$$K_{eq} = k_1 + \frac{k_2 \cdot k_3}{k_2 + k_3}$$

Question 12 Déterminer analytiquement l'expression de la fonction de transfert $H(p) = \frac{V_x(p)}{C_m(p)}$.
En déplaçant le 2nd comparateur à gauche on a :



fonction de transfert de la boucle interne :

$$\frac{\frac{R_p \cdot K_{eq}}{p(f_1 + J R p)}}{1 + \frac{R_p^2 \cdot K_{eq}}{p(f_1 + J R p)}} = \frac{R_p \cdot K_{eq}}{R_p^2 \cdot K_{eq} + p(f_1 + J R p)}$$

On en déduit :
$$H(p) = \frac{[R_p^2 \cdot K_{eq} + p(f_1 + J R p)] \cdot (f_2 + M e p)}{1 + \frac{K_{eq}(f_1 + J R p)}{[R_p^2 \cdot K_{eq} + p(f_1 + J R p)](f_2 + M e p)}}$$

soit finalement :

$$H(p) = \frac{R_p \cdot K_{eq}}{K_{eq}[R_p^2(f_2 + M e p) + f_1 + J R p] + p(f_1 + J R p) \cdot (f_2 + M e p)}$$

Or du schéma bloc, on a: $E_{\theta}(p) = K_A X(p) - \frac{K_{pos}}{R_p} X_c(p)$

On en déduit:
$$K_A = \frac{K_{pos}}{R_p} = \frac{2000}{2\pi \times 5} = 63,7 \text{ pt. mm}^{-1}$$

Question 17 À partir de la résolution de la commande du moteur (sans prendre en compte la chaîne d'acquisition), déterminer la précision de positionnement en millimètres de la traverse par rapport au bâti.

Le moteur a une résolution de $2000 \text{ pas. tr}^{-1} = \frac{2000}{2\pi} \text{ pas. rad}^{-1}$
 Soit une précision de $\frac{2\pi}{2000} \text{ rad. pas}^{-1}$ soit pour l'asservissement,
 avec le rayon de la poulie R_p :
$$\Delta x_{\text{mini}} = \frac{2\pi R_p}{2000} = 0,016 \text{ mm}$$

Conclure vis-à-vis du cahier des charges.

Le cahier des charges impose une erreur statique de position inférieure à $0,05 \text{ mm} > \Delta x_{\text{mini}}$.
 Donc la précision est suffisante pour pouvoir valider le C.D.C.

Question 18 Déterminer l'erreur statique de vitesse $\varepsilon_{\Omega_{\infty}}$ pour une entrée en échelon unitaire de la boucle tachymétrique.

Pour $C_x(p) = 1$ la FTBO est de classe 0 avec un gain statique $K_{BO} = K_m \cdot K_{vit}$

D'où l'erreur statique de la boucle tachymétrique non corrigée en réponse à un échelon unitaire de vitesse

$$\varepsilon_{\Omega_{\infty}} = \frac{1}{1 + K_m K_{vit}} \neq 0$$

Conclure vis-à-vis du cahier des charges.

Le cahier des charges de la boucle de vitesse Id 1.1.2.1 (Tableau 5) impose que cette erreur soit nulle. Donc le cahier des charges n'est pas vérifié pour $C_x(p) = 1$.

Question 19 Justifier l'utilisation d'un tel correcteur dans le cas présent.

Ce correcteur est utilisé pour introduire un intégrateur dans la FTBO. Et par conséquent pour annuler l'erreur statique de vitesse pour un échelon

Question 20 En justifiant la réponse notamment à l'aide de tracés sur la figure R3 du document-réponses, indiquer quelle(s) valeur(s) du gain $K_{\text{cor}\Omega}$ proposée(s) sur la figure R3 permet(tent) de vérifier le cahier des charges de la boucle tachymétrique.

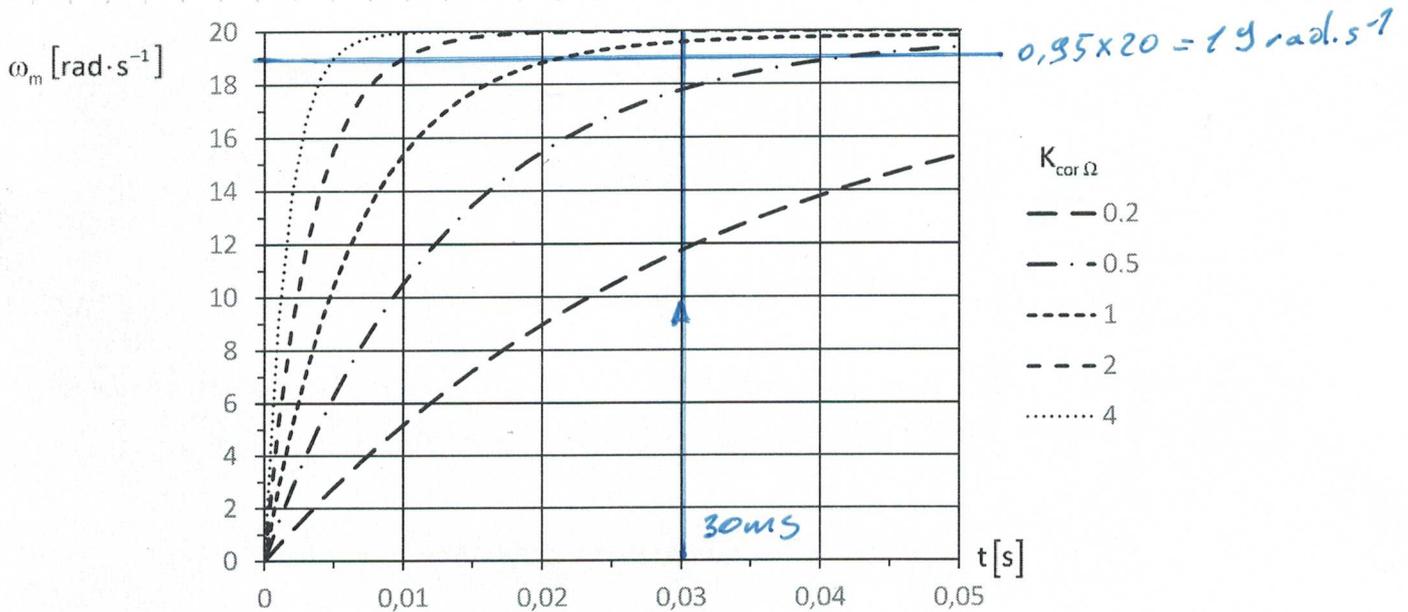


Figure R3 : réponse de la boucle tachymétrique à un échelon de vitesse de 20 rad/s en fonction du gain $K_{\text{cor}\Omega}$ du correcteur $C_{\Omega}(p)$

La FTBO est de classe 1 et d'ordre 2 donc l'erreur statique est nulle et $M_G = +\infty \geq 10 \text{ dB}$. Il n'y a pas de dépassement de la valeur finale pour la réponse de la FTBF à un échelon. Donc a priori $M\gamma \geq 40^\circ$ Pour la rapidité la figure R3 montre qu'il faut $K_{\text{cor}\Omega} = 1$ ou 2 ou 4

Question 21 À partir du diagramme de Bode de la fonction de transfert en boucle ouverte $H_{\text{bo}\Omega}(j\omega)$ (figure R4 du document-réponses), tracer le diagramme asymptotique de cette fonction. Proposer une expression numérique de la fonction de transfert $H_{\text{bo}\Omega}(p)$

Pour $\omega \rightarrow 0$ $\varphi_{\text{bo}\Omega} \rightarrow -30^\circ$ et pour $\omega \rightarrow +\infty$ $\varphi_{\text{bo}\Omega} \rightarrow -180^\circ$ donc
 $H_{\text{bo}\Omega}(p) = \frac{K_{\text{bo}\Omega}}{p(1+T_{\text{bo}\Omega} \cdot p)}$ L'asymptote du gain $\left(\frac{K_{\text{bo}\Omega}}{p}\right)$ pour $\omega \rightarrow 0$
 coupe l'axe des abscisses à $1000 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1} \Rightarrow K_{\text{bo}\Omega} = 1000 \text{ s}^{-1}$
 $\varphi_{\text{bo}\Omega}(\omega) = -135^\circ$ pour $\omega = 200 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$
 $\Rightarrow T_{\text{bo}\Omega} = \frac{1}{200} = 0,005$ $\Rightarrow H_{\text{bo}\Omega}(p) = \frac{1000}{p(1+0,005 \cdot p)}$

Déterminer alors une expression numérique de la fonction de transfert en boucle fermée non corrigée de la boucle de position $H_{\text{bf}\Omega}(p)$.

$$H_{\text{bf}\Omega}(p) = \frac{H_{\text{bo}\Omega}(p)}{1 + H_{\text{bo}\Omega}(p)} = \frac{\frac{1000}{p(1+0,005 \cdot p)}}{1 + \frac{1000}{p(1+0,005 \cdot p)}}$$

$$H_{\text{bf}\Omega}(p) = \frac{1000}{1000 + p + 0,005 p^2}$$

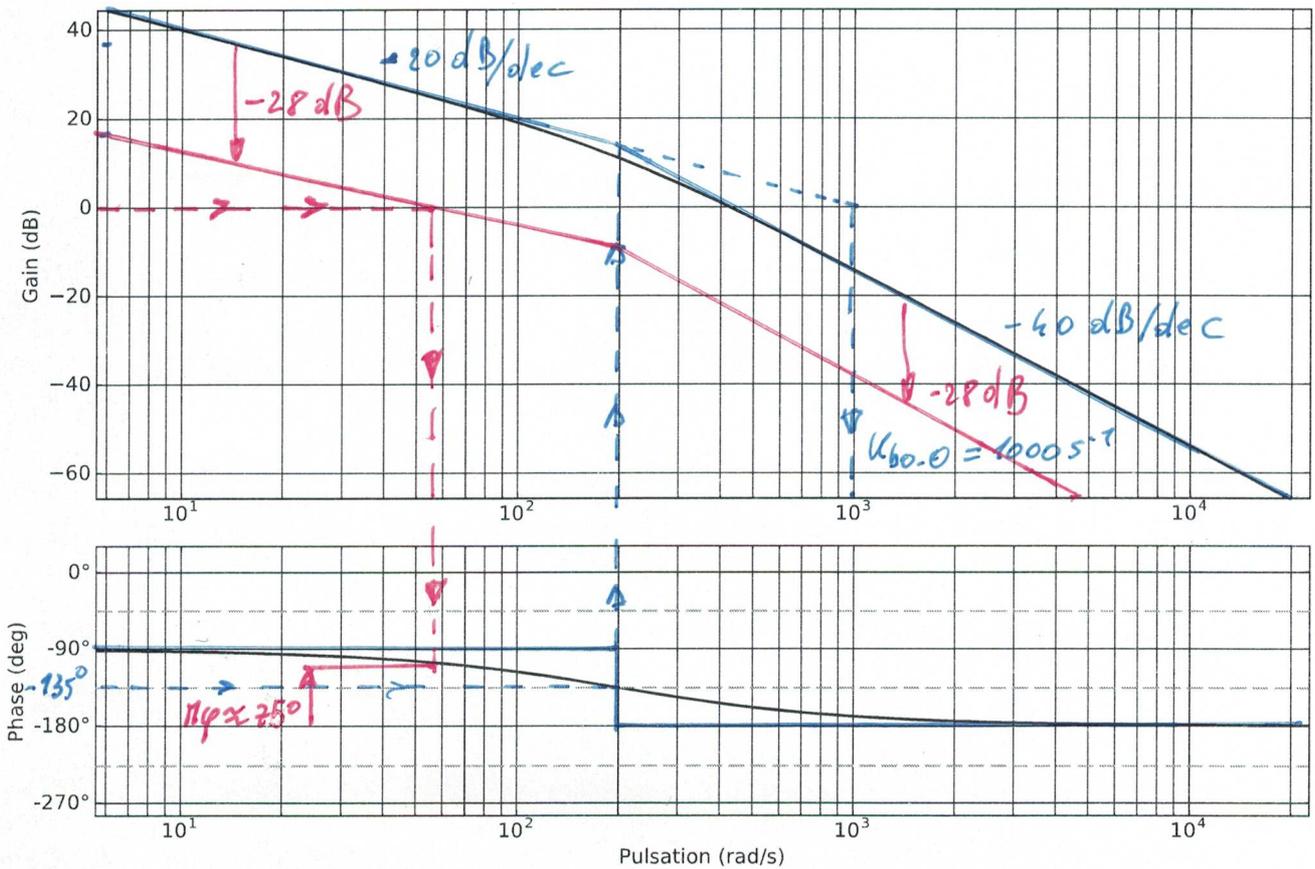


Figure R4 : diagramme de Bode de la fonction de transfert en boucle ouverte non corrigée de la boucle de position $H_{bo,\Theta}(j\omega)$

soit finalement
$$H_{bf,\Theta}(p) = \frac{1}{1 + 10^{-3}p + 5 \cdot 10^{-6}p^2}$$

Préciser les valeurs approchées des paramètres caractéristiques de cette fonction de transfert.

$$K_{bf,\Theta} = 1 \quad \omega_{pbf,\Theta} = \sqrt{\frac{10^6}{5}} = \frac{1000}{2,2} \Rightarrow \omega_{obf,\Theta} \approx 450 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$$

$$\zeta_{bf,\Theta} = \frac{\omega_{obf,\Theta} \times 10^{-3}}{2} = \frac{1000 \cdot 10^{-3}}{2 \times 2,2} = \frac{1}{4,4}$$

$$\zeta_{bf,\Theta} \approx 0,225$$

Question 22 À partir des résultats de la question 21, déterminer la fonction de transfert en boucle fermée de la boucle de position $H_{bf,\text{cor}}(p)$ en fonction de $K_{\text{cor},\Theta}$.

$$H_{bf,\text{cor}}(p) = \frac{1000 K_{\text{cor}}}{p(1 + 0,005p)} + \frac{1000 \cdot K_{\text{cor}}}{p(1 + 0,005p)} \Rightarrow \frac{1}{1 + \frac{10^{-3}}{K_{\text{cor}}}p + \frac{5 \cdot 10^{-6}}{K_{\text{cor}}}p^2} = H_{bf,\text{cor}}(p)$$

$$\omega_{obf,\text{cor}} = \frac{1000 \sqrt{K_{\text{cor}}}}{2,2}$$

$$\zeta_{bf,\text{cor}} = \frac{1000 \sqrt{K_{\text{cor}}} \cdot 10^{-3}}{2 \times 2,2 \cdot K_{\text{cor}}}$$

$$\zeta_{bf,\text{cor}} = \frac{1}{4,4 \sqrt{K_{\text{cor}}}} \approx \frac{0,225}{\sqrt{K_{\text{cor}}}}$$

numéro d'inscription



Né(e) le

Signature

Nom

Prénom(s)

Épreuve : Sciences Industrielles

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille

Déterminer la valeur maximale du gain $K_{cor⑥}$ du correcteur assurant le respect de l'exigence de dépassement du cahier des charges.

L'exigence Id 111 impose un dépassement nul $\Rightarrow \rho_{bf,cor} \geq 1$

$$\Rightarrow K_{cor} \leq \frac{1}{4,42} \approx 0,225^2 \approx 0,05$$

Question 23 Superposer en couleur sur la figure R4 le diagramme asymptotique de Bode de la fonction de transfert en boucle ouverte corrigée $H_{bo_cor}(j\omega)$. Préciser l'allure des courbes de gain et de phase.

On multiplie la FTBO par 0,05. La courbe de phase n'est pas modifiée celle de gain translatée de $20 \log 0,05 = -20 \times 2 \log 5 = -28 \text{ dB}$

Question 24 Justifier avec soin la stabilité en boucle fermée du modèle proposé.

La FTBF est une fonction de transfert du 2nd ordre avec 3 coefficients positifs. Donc tous les pôles de cette FTBF ont une partie réelle négative.

Le système est donc stable

Puis, mettre en évidence et déterminer graphiquement sur la figure R4 du document-réponses la marge de gain M_G et la marge de phase M_ϕ de la boucle de position corrigée.

Par une lecture sur le document R4, on a une marge de phase d'environ 75° (Par le calcul 76°) $\Rightarrow M_\phi \approx 75^\circ$

La phase de la FTBO (second ordre de classe 1) varie de -90° à -180° , d'où une marge de gain infinie: $\Rightarrow M_G = +\infty$

Conclure quant au respect de l'exigence de stabilité du cahier des charges.

Conformément au cahier des charges on a bien $M_\phi = 75^\circ \geq 45^\circ$ et $M_G = +\infty \geq 10 \text{ dB}$. L'exigence de stabilité du cahier des charges est bien respectée.

NE RIEN ECRIRE

DANS CE CADRE

Question 25 Conclure quant à la validité de la commande de la boucle de position avec un correcteur proportionnel vis-à-vis du cahier des charges.

On a vu qu'avec un correcteur proportionnel $K_{cor} = 0,05$
→ l'exigence de stabilité est vérifiée (question 24)
→ l'exigence d'un dépassement nul est vérifiée (question 22)
→ le gain de la FTBF est unitaire (question 22) → l'erreur nulle.
Donc un correcteur proportionnel permet de vérifier toutes les exigences.

Question 26 Donner la forme simplifiée dans la base vectorielle $B_5(\vec{x}_5, \vec{y}_5, \vec{z}_5)$ de la matrice d'inertie $[I(G_5, 5)]$.

La broche 5 est considérée comme un solide de révolution, d'où la forme de la matrice d'inertie.

$$[I(G_5, 5)] = \begin{pmatrix} A_5 & 0 & 0 \\ 0 & A_5 & 0 \\ 0 & 0 & C_5 \end{pmatrix}_{B_5}$$

Question 27 Calculer la coordonnée $\delta(O_2, 5/0) \cdot \vec{y}$ du moment dynamique au point O_2 de la broche 5 en mouvement dans le référentiel bâti 0.

$$\vec{V}_{G_5 E 5/0} = \vec{V}_{G_5 E 5/4} + \vec{V}_{G_5 E 4/3} + \vec{V}_{G_5 E 3/1} + \vec{V}_{G_5 E 1/0}$$

$$\text{Or: } \{v(3/1)\} = \{0\} \text{ Donc } \vec{V}_{G_5 E 3/1} = \vec{0}$$

$$\text{et 4 et 5 sont en liaison pivot d'axe } (G_5 \vec{z}_5) \text{ donc } \vec{V}_{G_5 E 5/4} = \vec{0}$$

Enfin étant donné les torseurs $\{v(4/3)\}$ et $\{v(1/0)\}$ on obtient

$$\vec{V}_{G_5 E 5/0} = V_x \vec{x}_5 + V_z \vec{z}_5 \text{ Donc } \vec{a}(G_5, 5/0) = \frac{dV_x}{dt} \vec{x}_5 + \frac{dV_z}{dt} \vec{z}_5$$

Ayant $\delta(G_5, 5/0) = \vec{0}$ on obtient par Varignon :

$$\delta(O_2, 5/0) \cdot \vec{y} = \vec{0} \cdot \vec{y} + O_2 G_5 \wedge m_5 \vec{a}(G_5, 5/0) \cdot \vec{y}$$

$$\delta(O_2, 5/0) \cdot \vec{y} = m_5 \cdot (x_5 \vec{x}_5 + z_5 \vec{z}_5) \wedge \left(\frac{dV_x}{dt} \vec{x}_5 + \frac{dV_z}{dt} \vec{z}_5 \right) \cdot \vec{y}$$

$$\delta(O_2, 5/0) \cdot \vec{y} = m_5 \left(z_5 \frac{dV_x}{dt} \vec{y} - x_5 \frac{dV_z}{dt} \vec{y} \right) \cdot \vec{y}$$

Donc :

$$\delta(O_2, 5/0) \cdot \vec{y} = m_5 \left(z_5 \frac{dV_x}{dt} - x_5 \frac{dV_z}{dt} \right)$$

Question 28 Déterminer la coordonnée M_{32} du moment au point O_2 de l'action mécanique exercée par le porte-outil 3 sur le chariot 2. Préciser l'équation scalaire du principe fondamental de la dynamique utilisée, le(s) solide(s) isolé(s), les actions mécaniques prises en compte, les hypothèses effectuées.

Étant donné les torseurs cinématique donnés on en déduit

$$a_{(G_4, 4/0)} = \frac{dV_x}{dt} \vec{x} + \frac{dV_z}{dt} \vec{z} \quad \text{et} \quad a_{(G_3, 3/0)} = \frac{dV_x}{dt} \vec{x}$$

Puis sachant que 3 et 4 sont en translation par rapport à 0 (Liaisons glissière 0/1, 1/2, 2/3 et 3/4) on obtient par des relations de Varignon (comme à la question 27)

$$\delta(O_2, 4/0) \cdot \vec{y} = m_4 \left(z_4 \frac{dV_x}{dt} - x_4 \frac{dV_z}{dt} \right) \quad \text{et} \quad \delta(O_2, 3/0) \cdot \vec{y} = m_3 z_3 \frac{dV_x}{dt}$$

On isole l'ensemble $\{3, 4, 5\}$ sur lequel les actions mécaniques extérieures sont:

→ L'action de pesanteur sur 3, 4 et 5 de résultantes

$-m_i g \vec{z}$ appliquées au point G_i pour i de 3 à 5

→ L'action de 2 sur 3 de torseur $\{F_{3-2}\}$

Un TMD au point O_2 en projection sur \vec{y} donne:

$$\sum_{i=3}^5 \delta(O_2, i/0) \cdot \vec{y} = \sum_{i=3}^5 (O_2 G_i \wedge -m_i g \vec{z}) \cdot \vec{y} - M_{32}$$

$$\sum_{i=3}^5 \delta(O_2, i/0) \cdot \vec{y} = \sum_{i=3}^5 -m_i g \vec{z} \wedge \vec{y} \cdot (x_i \vec{x} + z_i \vec{z}) - M_{32}$$

soit finalement:

$$M_{32} = \sum_{i=3}^5 m_i g x_i - \sum_{i=3}^5 \delta(O_2, i/0) \cdot \vec{y}$$

De part les résultats précédent on obtient:

$$M_{32} = g(m_3 x_3 + m_4 x_4 + m_5 x_5) + (m_4 x_4 + m_5 x_5) \frac{dv_z}{dt} - (m_3 z_3 + m_4 z_4 + m_5 z_5) \frac{dv_x}{dt}$$

Question 29 Relever sur la figure 19 les conditions de fonctionnement $\left(\frac{dv_x}{dt}; \frac{dv_z}{dt}\right)$ générant le moment M_{32} le plus contraignant pour la liaison complète porte-outil 3 / chariot 2. Préciser la valeur numérique correspondante de M_{32} .

Le moment M_{32} le plus contraignant pour la liaison est celui dont la valeur absolue est maximale soit dans le cas où

$$\frac{dv_x}{dt} = -10 \text{ m.s}^{-2} \quad \text{et} \quad \frac{dv_z}{dt} = +10 \text{ m.s}^{-2} \quad \text{on a alors}$$

$$M_{32} = -2,05 \text{ N.m} \quad \text{soit} \quad |M_{32}| = 2,05 \text{ N.m}$$

Question 30 À partir du résultat précédent et compte tenu que la masse totale de l'ensemble {porte-outil 3 ; coulisseau 4 ; visseuse} est estimée à 1 kg, déterminer la valeur du facteur de charge dans la configuration étudiée.

Par des TRD en O_2 en projection sur \vec{x} et \vec{z} on a: $L_{32} = M_{32} = 0$

Par un TRD à $\{3,4,5\}$ en projection sur \vec{z} on obtient.

$$-Z_{32} = (m_3 + m_4 + m_5)g + (m_4 + m_5) \frac{dv_z}{dt} \quad \text{avec} \quad \frac{dv_z}{dt} > 0$$

$$\text{soit} \quad |Z_{32}| < (m_3 + m_4 + m_5) \cdot \left(g + \frac{dv_z}{dt}\right) = 1 \times (10 + 10) = 20 \text{ N}$$

Ayant $Z_{32 \text{ max}} = 100 \text{ N}$ et $M_{32 \text{ max}} = 67 \text{ N.m}$.

on obtient alors un facteur de charge:

$$f_v < \frac{20}{100} + \frac{2}{67} \approx 0,23$$

Conclure en indiquant si l'utilisation de l'EXCM-30 sur le poste de vissage est possible d'un point de vue des efforts de liaison dans les guidages.

On a un facteur de charge $f_v < 1$

Donc l'utilisation de l'EXCM-30 sur le poste de vissage est possible d'un point de vue des efforts de liaison dans les guidages.