

Moments d'inertie de solides homogènes

1- Théorème de Huygens

Soit un solide S de masse m et de centre de gravité G.

Soit deux axes parallèles de vecteur directeur $\vec{Z}$ (tel que $\|\vec{Z}\| = 1$) et passant par les points O et G.

Soit un point M quelconque de ce solide S.

On pose les distances :

- ☞ d : Entre les axes (O, $\vec{Z}$) et (G, $\vec{Z}$)
- ☞ r_G : Entre le point M et l'axe (G, $\vec{Z}$)
- ☞ r_O : Entre le point M et l'axe (O, $\vec{Z}$)

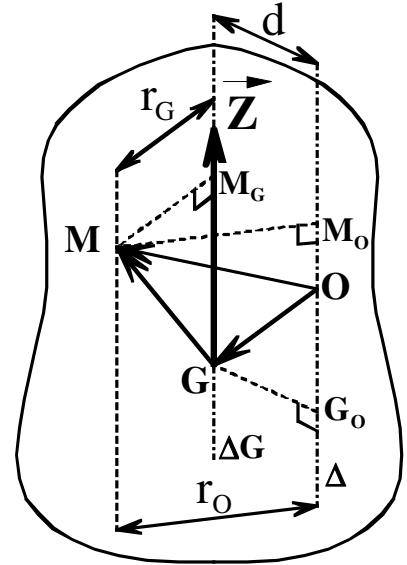
Sachant que $\|\vec{Z}\| = 1$ et que par définition du produit vectoriel :

$$\|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \sin(\widehat{(\vec{u}, \vec{v})})$$

On en déduit : $d^2 = (\vec{OG} \wedge \vec{Z})^2$

$$r_G^2 = (\vec{GM} \wedge \vec{Z})^2$$

$$r_O^2 = (\vec{OM} \wedge \vec{Z})^2$$



Par définition du moment d'inertie par rapport à l'axe (O, $\vec{Z}$) on a :

$$I_{O\vec{Z}}(S) = \iiint_S r_O^2 \cdot dm = \iiint_S (\vec{OM} \wedge \vec{Z})^2 \cdot dm = \iiint_S ((\vec{OG} + \vec{GM}) \wedge \vec{Z})^2 \cdot dm$$

$$I_{O\vec{Z}}(S) = \iiint_S ((\vec{OG} + \vec{GM}) \wedge \vec{Z}) \cdot ((\vec{OG} + \vec{GM}) \wedge \vec{Z}) \cdot dm$$

$$I_{O\vec{Z}}(S) = \iiint_S [(\vec{OG} \wedge \vec{Z})^2 + (\vec{GM} \wedge \vec{Z})^2 + 2 \cdot (\vec{OG} \wedge \vec{Z}) \cdot (\vec{GM} \wedge \vec{Z})] \cdot dm$$

$$I_{O\vec{Z}}(S) = \iiint_S d^2 \cdot dm + \iiint_S r_G^2 \cdot dm + 2 \cdot \iiint_S (\vec{GM} \wedge \vec{Z}) \cdot (\vec{OG} \wedge \vec{Z}) \cdot dm$$

$$I_{O\vec{Z}}(S) = d^2 \cdot \iiint_S dm + I_{G\vec{Z}}(S) + 2 \cdot \left[\iiint_S \vec{GM} \cdot dm \right] \wedge \vec{Z} \cdot (\vec{OG} \wedge \vec{Z})$$

Or par définition du centre d'inertie : $\iiint_S \vec{GM} \cdot dm = \vec{0}$ et de la masse : $m = \iiint_S dm$

Donc :

$$I_{O\vec{Z}}(S) = I_{G\vec{Z}}(S) + m \cdot d^2$$

Conclusion

Soit un solide S de masse m et de centre de gravité G. Soit deux axes parallèles : Δ quelconque et Δ_G passant par G distant d'une distance d l'un de l'autre. Alors si on pose I_Δ et I_{Δ_G} les moments d'inertie par rapport aux axes Δ et Δ_G on a :

$$I_\Delta = I_{\Delta_G} + m \cdot d^2$$

Remarque :

Ce théorème de Huygens ne peut s'appliquer que si G est le centre de gravité du solide S.

2- Moments d'inertie de solides homogènes

2.1- Cylindre plein

Soit un cylindre homogène : ☞ D'axe Δ ☞ De rayon R
 ☞ De hauteur h ☞ De masse volumique ρ

On décompose ce cylindre en volumes élémentaires. Ces volumes élémentaires sont des cylindres creux : ☞ D'axe Δ ☞ De rayon r

☞ De hauteur h ☞ D'épaisseur dr

Tous les volumes élémentaires dv de masse $dm = \rho \cdot dv$ sont constitués de points tous équidistants de l'axe Δ . Cette distance étant r , on en déduit pour ce cylindre le moment d'inertie par rapport à l'axe Δ :

$$I_{\Delta} = \iiint_S r^2 \cdot dm$$

Etant donné les caractéristiques du volume élémentaire : $dm = \rho \cdot dv = \rho \cdot 2 \cdot \pi \cdot r \cdot h \cdot dr$

Donc : $I_{\Delta} = \int_0^R r^2 \cdot \rho \cdot 2 \cdot \pi \cdot r \cdot h \cdot dr = 2 \cdot \pi \cdot h \cdot \rho \cdot \int_0^R r^3 \cdot dr$

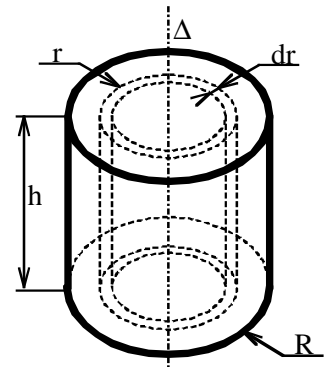
$$I_{\Delta} = 2 \cdot \pi \cdot h \cdot \rho \cdot \left[\frac{r^4}{4} \right]_0^R = 2 \cdot \pi \cdot h \cdot \rho \cdot \frac{R^4}{4} = \frac{\pi \cdot R^4 \cdot h \cdot \rho}{2}$$

Sachant que la masse m d'un cylindre homogène de rayon R de hauteur h et de masse volumique ρ est :

$$m = \pi \cdot R^2 \cdot h \cdot \rho$$

On en déduit le moment d'inertie par rapport à l'axe Δ :

$$I_{\Delta} = \frac{m \cdot R^2}{2}$$



2.2- Cylindre creux

Soit un cylindre creux homogène : ☞ D'axe Δ ☞ De rayon extérieur R_{ext}
 ☞ De rayon intérieur R_{int} ☞ De hauteur h ☞ De masse volumique ρ

Ce volume est la soustraction d'un cylindre plein de rayon R_{int} à un cylindre plein de rayon R_{ext} . Etant donné l'expression établie précédemment concernant le moment d'inertie d'un cylindre plein, on a pour ce cylindre creux homogène

un moment d'inertie : $I_{\Delta} = \frac{\pi \cdot R_{ext}^4 \cdot h \cdot \rho}{2} - \frac{\pi \cdot R_{int}^4 \cdot h \cdot \rho}{2}$

Donc : $I_{\Delta} = \frac{\pi \cdot (R_{ext}^4 - R_{int}^4) \cdot h \cdot \rho}{2}$

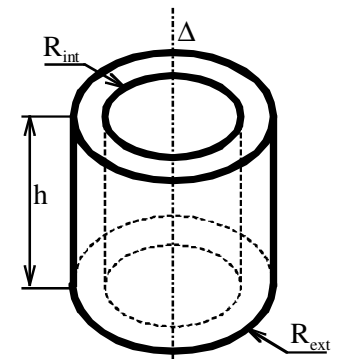
$$I_{\Delta} = \frac{\pi \cdot (R_{ext}^2 + R_{int}^2) \cdot (R_{ext}^2 - R_{int}^2) \cdot h \cdot \rho}{2}$$

Sachant que la masse m d'un cylindre creux homogène de rayon extérieur R_{ext} de rayon intérieur R_{int} de hauteur h et de masse volumique ρ est :

$$m = \pi \cdot (R_{ext}^2 - R_{int}^2) \cdot h \cdot \rho$$

D'où le moment d'inertie :

$$I_{\Delta} = \frac{m \cdot (R_{ext}^2 + R_{int}^2)}{2}$$



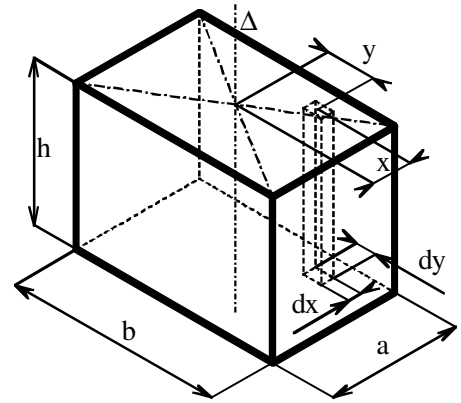
2.3- Parallélépipède rectangle

Soit un parallélépipède rectangle homogène :

- ☞ D'axe Δ passant par les milieux de deux faces opposées
- ☞ De hauteur h (parallèlement à l'axe Δ)
- ☞ De largeur a et de longueur b
- ☞ De masse volumique ρ

On décompose ce parallélépipède en volumes élémentaires. Ces volumes élémentaires sont des parallélépipède rectangle :

- ☞ De hauteur h (parallèlement à l'axe Δ)
- ☞ De largeur dx et de longueur dy



Tous les volumes élémentaires dv de masse $dm = \rho \cdot dv$ sont constitués de points équidistants de l'axe Δ . Cette distance étant $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, D'où pour ce parallélépipède le moment d'inertie par rapport à l'axe Δ :

$$I_{\Delta} = \iiint_S r^2 \cdot dm = \iiint_S (x^2 + y^2) \cdot dm$$

Etant donné les caractéristiques du volume élémentaire : $dm = \rho \cdot dv = \rho \cdot h \cdot dx \cdot dy$

Donc :

$$I_{\Delta} = \iiint_S (x^2 + y^2) \cdot \rho \cdot h \cdot dx \cdot dy$$

$$I_{\Delta} = \rho \cdot h \cdot \int_{-b/2}^{+b/2} \left[\int_{-a/2}^{+a/2} (x^2 + y^2) \cdot dx \right] \cdot dy$$

$$I_{\Delta} = \rho \cdot h \cdot \int_{-b/2}^{+b/2} \left[\frac{x^3}{3} + y^2 \cdot x \right]_{-a/2}^{+a/2} \cdot dy = \rho \cdot h \cdot \int_{-b/2}^{+b/2} \left(\frac{a^3}{12} + y^2 \cdot a \right) \cdot dy$$

$$I_{\Delta} = \rho \cdot h \cdot \left[\frac{a^3}{12} \cdot y + \frac{y^3}{3} \cdot a \right]_{-b/2}^{+b/2} = \rho \cdot h \cdot \left(\frac{a^3 \cdot b}{12} + \frac{b^3 \cdot a}{12} \right)$$

$$I_{\Delta} = \frac{\rho \cdot h \cdot a \cdot b \cdot (a^2 + b^2)}{12}$$

Sachant que la masse m d'un parallélépipède rectangle homogène de dimensions $a \times b \times h$ est :

$$m = \rho \cdot h \cdot a \cdot b$$

On en déduit le moment d'inertie :

$$I_{\Delta} = \frac{m \cdot (a^2 + b^2)}{12}$$

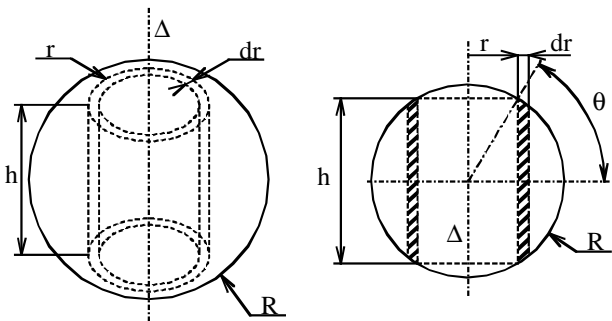
5.4- Sphère pleine

Soit une sphère homogène :

- ☞ De rayon R
- ☞ De masse volumique ρ

On décompose ce cylindre en volumes élémentaires. Ces volumes élémentaires sont des cylindres creux :

- ☞ D'axe Δ
- ☞ De rayon r
- ☞ De hauteur h
- ☞ D'épaisseur dr



Tous les volumes élémentaires dv de masse $dm = \rho \cdot dv$ sont constitués de points équidistants de l'axe Δ . Cette distance étant r , on en déduit pour ce cylindre le moment d'inertie par rapport à l'axe Δ :

$$I_{\Delta} = \iiint_S r^2 \cdot dm = \int_0^R r^2 \cdot dm$$

Etant donné les caractéristiques du volume élémentaire : $dm = \rho \cdot dv = \rho \cdot 2 \cdot \pi \cdot r \cdot h \cdot dr$

On pose θ l'angle défini par un plan perpendiculaire à l'axe Δ et la droite passant par l'arrêt intérieure de ce cylindre creux. Ce plan et cette droite passant tout deux par le centre de la sphère.

On a alors : $r = R \cdot \cos \theta$ $dr = -R \cdot \sin \theta \cdot d\theta$ $h = 2 \cdot R \cdot \sin \theta$

On a donc : $I_{\Delta} = - \int_{\pi/2}^0 (R \cdot \cos \theta)^2 \cdot \rho \cdot 2 \cdot \pi \cdot R \cdot \cos \theta \cdot 2 \cdot R \cdot \sin \theta \cdot R \cdot \sin \theta \cdot d\theta$

$$I_{\Delta} = 4 \cdot \pi \cdot R^5 \cdot \rho \cdot \int_0^{\pi/2} \cos^3 \theta \cdot \sin^2 \theta \cdot d\theta$$

$$I_{\Delta} = 4 \cdot \pi \cdot R^5 \cdot \rho \cdot \int_0^{\pi/2} (\cos \theta \cdot (1 - \sin^2 \theta) \cdot \sin^2 \theta) \cdot d\theta$$

$$I_{\Delta} = 4 \cdot \pi \cdot R^5 \cdot \rho \cdot \int_0^{\pi/2} (\cos \theta \cdot \sin^2 \theta - \cos \theta \cdot \sin^4 \theta) \cdot d\theta$$

$$I_{\Delta} = 4 \cdot \pi \cdot R^5 \cdot \rho \cdot \left[\frac{\sin^3 \theta}{3} - \frac{\sin^5 \theta}{5} \right]_0^{\pi/2} = 4 \cdot \pi \cdot R^5 \cdot \rho \cdot \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) = \frac{4 \times 2}{3 \times 5} \cdot \pi \cdot R^5 \cdot \rho$$

Sachant que la masse m d'une Sphère homogène de rayon R et de masse volumique ρ est :

$$m = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot R^3 \cdot \rho$$

On en déduit le moment d'inertie par rapport à tout axe Δ passant par le centre de la sphère :

$$I_{\Delta} = \frac{2}{5} m R^2$$

5.5- Barre de faible section

Soit une plaque parallélépipédique homogène :

- ☞ D'axe Δ passant orthogonalement au milieu de la barre.
- ☞ De Longueur ℓ (orthogonalement à l'axe Δ)
- ☞ De largeur a et d'épaisseur b
- ☞ De masse volumique ρ

Cette barre est un parallélépipède rectangle homogène de masse volumique ρ dont la masse est donc :

$$m = \rho \cdot \ell \cdot a \cdot b$$

Et le moment d'inertie par rapport à cet axe Δ

$$I_{\Delta} = \frac{m \cdot (\ell^2 + b^2)}{12}$$

Or l'épaisseur b de cette plaque étant négligeable devant sa longueur ℓ on a : b^2 négligeable devant ℓ^2

Donc cette plaque homogène de hauteur h , largeur a , épaisseur e , masse volumique ρ a une masse de :

$$m = \rho \cdot \ell \cdot a \cdot b$$

Et un moment d'inertie par rapport à l'axe Δ parallèle à la hauteur et passant par le milieu de la plaque :

$$I_{\Delta} = \frac{m \cdot \ell^2}{12}$$

Remarque :

On montre que cette expression reste valable pour toute barre. Même si la section n'est pas rectangulaire. A la condition que les dimensions de cette section restent faibles devant la longueur.

