

Théorème de l'énergie cinétique : cas des mouvements simples

1-Théorème de l'énergie cinétique : Enoncé

1.1- Démonstration pour une masse ponctuelle

Soit une masse ponctuelle au point P de masse m en mouvement à la vitesse $\vec{V}_{P \in m/R_g}$ par rapport à un repère galiléen.

Si cette masse ponctuelle m est soumise à une force $\vec{F}$ alors celle-ci fera varier la vitesse $\vec{V}_{P \in m/R_g}$ conformément au PFD : $\vec{F} = m \cdot \vec{a}_{P \in m/R_g} = m \left(\frac{d \vec{V}_{P \in m/R_g}}{dt} \right)_{R_g}$

Faisons le produit scalaire de cette égalité avec la vitesse $\vec{V}_{P \in m/R_g}$. On a alors :

$$\vec{F} \cdot \vec{V}_{P \in m/R_g} = m \left(\frac{d \vec{V}_{P \in m/R_g}}{dt} \right)_{R_g} \cdot \vec{V}_{P \in m/R_g} = \frac{d \frac{1}{2} \cdot m \cdot \vec{V}_{P \in m/R_g}^2}{dt}$$

Le terme : $\frac{1}{2} \cdot m \cdot \vec{V}_{P \in m/R_g}^2$ est homogène à une énergie. Cette énergie est due à la vitesse de la masse ponctuelle m dans le repère galiléen R_g . **Il s'agit donc de l'énergie cinétique de la masse m dans son mouvement par rapport au repère R_g .**

Le terme $\vec{F} \cdot \vec{V}_{P \in m/R_g}$ fait donc varier l'énergie cinétique. Il s'agit donc d'un échange d'énergie avec l'extérieur de la masse m. Il est homogène à une énergie par unité de temps, c'est-à-dire à une puissance. **Il s'agit donc de la puissance de la force $\vec{F}$ par rapport au repère galiléen R_g .**

1.2- Enoncé pour une masse ponctuelle

La puissance des forces extérieures par rapport à un repère galiléen s'appliquant sur une masse ponctuelle au point P est égale à la variation par rapport au temps de l'énergie cinétique par rapport à ce même repère galiléen.

Où :

1.3- Généralisation à un solide

Un solide S_i de masse m peut se décomposer en une infinité de petite masses ponctuelles dm situées en P pour lesquelles on a : $m = \iiint_{S_i} dm$. La somme de toutes les égalités liées au théorème de l'énergie cinétique appliqué à toutes les masses dm donne alors :

$$\iiint_{S_i} \vec{F}_{Ext} \cdot \vec{V}_{P \in S_i/R_g} + \iiint_{S_i} \vec{F}_{Int} \cdot \vec{V}_{P \in S_i/R_g} = \iiint_{S_i} \frac{d E_C(m/R_g)}{dt} = \frac{d \iiint_{S_i} E_C(dm/R_g)}{dt}$$

A partir du principe des actions mutuelles, On montre pour un solide que : $\iiint_{S_i} \vec{F}_{Int} \cdot \vec{V}_{P \in S_i/R_g} = 0$

D'autre part : $\iiint_{S_i} \vec{F}_{Ext} \cdot \vec{V}_{P \in S_i/R_g} = \Sigma P(Ext \rightarrow S_i/R_g)$ et : $\iiint_{S_i} E_C(dm/R_g) = E_C(S_i/R_g)$

On a donc pour un solide S_i :

$$\Sigma P(Ext \rightarrow S_i/R_g) = \frac{d E_C(S_i/R_g)}{dt}$$

1.4- Généralisation à un ensemble de solides

Pour un système S constitué d'un ensemble de solides indéformables $S : S = \sum_{i=1}^n S_i$.

L'énergie cinétique de ce système est la somme des énergies cinétiques de chacun des solides :

Prenons l'exemple d'un système S constitué de deux solides S_1 et S_2 :

$$\sum_{i=1}^2 \sum P(\text{Ext}_{S_i} \rightarrow S_i / R_g) = \sum P(\text{Ext}_S \rightarrow S_1 / R_g) + P(S_2 \rightarrow S_1 / R_g) + \sum P(\text{Ext}_S \rightarrow S_2 / R_g) + P(S_1 \rightarrow S_2 / R_g)$$

$$\sum_{i=1}^2 \sum P(\text{Ext}_{S_i} \rightarrow S_i / R_g) = \sum P(\text{Ext}_S \rightarrow S / R_g) + P(S_2 \rightarrow S_1 / R_g) + P(S_1 \rightarrow S_2 / R_g)$$

Le terme $P(S_2 \rightarrow S_1 / R_g) + P(S_1 \rightarrow S_2 / R_g)$ est appelé la puissance des inter-efforts du système constitué des deux solides, ou puissance des actions intérieures du système. On la note : $P(\text{Int}_S \rightarrow S / R_g)$.

On obtient alors :

$$\sum_{i=1}^2 \sum P(\text{Ext}_{S_i} \rightarrow S_i / R_g) = \sum P(\text{Ext}_S \rightarrow S / R_g) + P(\text{Int}_S \rightarrow S / R_g)$$

On montre de la même manière en généralisant à un système S constitué de n solides S_i :

Donc pour un système S constitué d'un ensemble de solides si on note :

☞ $\sum P(\text{Ext} \rightarrow S, R_g)$ et $\sum P(\text{Int} \rightarrow S, R_g)$ les sommes des puissances des actions extérieures et intérieures au système S, par rapport au repère Galiléen R_g .

☞ $E_C(S/R_g)$ l'énergie cinétique du système S par rapport au repère R_g .

Alors le théorème de l'énergie cinétique s'écrit :

2- Calcul de l'énergie cinétique

Soit un solide S décomposé en une infinité de petite masse ponctuelles dm situées en P. On a alors :

$$m = \iiint_S dm \quad \text{et :} \quad E_C(S/R_g) = \iiint_S E_C(dm/R_g) = \iiint_S \frac{1}{2} \overrightarrow{V_{P \in S/R_g}}^2 \cdot dm$$

2.1- Cas d'un solide en translation

Pour un solide en translation quelque soit les points P et A on a : $\overrightarrow{V_{P \in S/R_g}} = \overrightarrow{V_{A \in S/R_g}}$

On en déduit :

$$E_C(S/R_g) = \iiint_S \frac{1}{2} \overrightarrow{V_{A \in S/R_g}}^2 \cdot dm = \frac{1}{2} \overrightarrow{V_{A \in S/R_g}}^2 \cdot \iiint_S dm$$

Donc :

Cette relation est notamment valable avec le centre de gravité G du solide : $E_C(S/R_g) = \frac{1}{2} m \cdot \overrightarrow{V_{G \in S/R_g}}^2$

2.2- Cas d'un solide en rotation autour d'un axe fixe dans la repère galiléen R_g

Soit un solide S en rotation d'axe Δ telle que la vitesse de rotation est ω .

Quelque soit le point P de S il existe un point P' défini comme le projeté orthogonal du point P sur l'axe Δ . Le segment $\overrightarrow{PP'}$ est alors le rayon de la trajectoire circulaire de P ($T_{P \in S/R_g}$) défini par la rotation.

Quelques soit le point P on a alors : $\overrightarrow{V_{P \in S/R_g}} = \overrightarrow{V_{P' \in S/R_g}} + \overrightarrow{PP'} \wedge \overrightarrow{\Omega(S/R_g)}$

Or le point P' étant sur l'axe Δ : $\overrightarrow{V_{P' \in S/R_g}} = \vec{0}$ donc : $\overrightarrow{V_{P \in S/R_g}} = \overrightarrow{PP'} \wedge \overrightarrow{\Omega(S/R_g)}$

D'autre part : $\overrightarrow{\Omega(S/R_g)} \perp \overrightarrow{PP'}$ donc : $\overrightarrow{V_{P \in S/R_g}}^2 = \|\overrightarrow{PP'}\|^2 \cdot \|\overrightarrow{\Omega(S/R_g)}\|^2$

Par conséquent : $E_C(S/R_g) = \iiint_S \frac{1}{2} \|\overrightarrow{PP'}\|^2 \cdot \|\overrightarrow{\Omega(S/R_g)}\|^2 dm$

Or : $\|\overrightarrow{\Omega(S/R_g)}\| = \omega$ quelque soit le point P

Et : $\overrightarrow{PP'}$ est un rayon.

Donc si on note r ce rayon on a : $E_C(S/R_g) = \iiint_S \frac{1}{2} r^2 \cdot \omega^2 dm$

Donc si un solide S est en rotation d'axe Δ alors son énergie cinétique dans le repère R_g est :

Où : $\Rightarrow I_\Delta$ est le moment d'inertie de S par rapport à Δ
 $\Rightarrow \omega$ est la vitesse de rotation de S par rapport à R_g

2.3- Cas de plusieurs solides

Si un système S est constitué de n solides S_i : $S = \sum_{i=1}^n S_i$ alors l'énergie cinétique du système par rapport au repère R_g est la somme des énergies cinétiques de chacun de ces solides par rapport à R_g .

3- Puissance d'une action mécanique

3.1- Action mécanique

Une action mécanique d'un corps S_1 sur un autre corps S_2 est en générale la somme sur une surface Σ d'une pression répartie $\overrightarrow{p(P)}$, ou sur un volume V d'une charge de densité $\overrightarrow{g(P)}$, variable ou constante en fonction du point P . L'action mécanique qui résulte de cette charge répartie peut être modélisée par le torseur dont les éléments de réduction en A sont pour :

$\Rightarrow$ La résultante $R(\overrightarrow{1 \rightarrow 2})$ tel que : $\overrightarrow{R(\overrightarrow{1 \rightarrow 2})} = \iint_{\Sigma} \overrightarrow{p(P)} \cdot ds$ ou $= \iiint_V \overrightarrow{g(P)} \cdot dv$

$\Rightarrow$ Le moment en A $\mathcal{M}_A(\overrightarrow{1 \rightarrow 2})$ tel que : $\overrightarrow{\mathcal{M}_A(\overrightarrow{1 \rightarrow 2})} = \iint_{\Sigma} \overrightarrow{AP} \wedge \overrightarrow{p(P)} \cdot ds$ ou $= \iiint_V \overrightarrow{AP} \wedge \overrightarrow{g(P)} \cdot dv$

3.2- Puissance d'une action mécanique

3.2.1- Définition

La puissance d'une action mécanique sur d'un corps 1 sur un solide 2 par rapport au repère R_g est la somme des puissances des forces élémentaires créées par la charge répartie de densité $\vec{p}(P)$

On a donc :
$$P(1 \rightarrow 2/R_g) = \iint_{\Sigma} \vec{p}(P) \cdot \vec{V}_{P \in 2/R_g} ds$$

3.2.2- Démonstration

Quelque soit les points A et P on a : $\vec{V}_{P \in 2/R_g} = \vec{V}_{A \in 2/R_g} + \vec{\Omega}(2/R_g) \wedge \vec{AP}$

Donc :
$$P(1 \rightarrow 2/R_g) = \iint_{\Sigma} \vec{p}(P) \cdot [\vec{V}_{A \in 2/R_g} + \vec{\Omega}(2/R_g) \wedge \vec{AP}] ds$$

$$P(1 \rightarrow 2/R_g) = \iint_{\Sigma} \vec{p}(P) \cdot \vec{V}_{A \in 2/R_g} ds + \iint_{\Sigma} \vec{p}(P) \cdot \vec{\Omega}(2/R_g) \wedge \vec{AP} ds$$

$$P(1 \rightarrow 2/R_g) = \vec{V}_{A \in 2/R_g} \cdot \iint_{\Sigma} \vec{p}(P) ds + \iint_{\Sigma} \vec{\Omega}(2/R_g) \cdot \vec{AP} \wedge \vec{p}(P) ds$$

$$P(1 \rightarrow 2/R_g) = \vec{V}_{A \in 2/R_g} \cdot \iint_{\Sigma} \vec{p}(P) ds + \vec{\Omega}(2/R_g) \cdot \iint_{\Sigma} \vec{AP} \wedge \vec{p}(P) ds$$

Or:
$$\iint_{\Sigma} \vec{p}(P) ds = R(1 \rightarrow 2)$$
 est la résultante de l'action de 1 sur 2

$$\iint_{\Sigma} \vec{AP} \wedge \vec{p}(P) ds = \mathcal{M}_A(1 \rightarrow 2)$$
 est le moment au point A de l'action de 1 sur 2

3.2.3- Conclusion

La puissance d'une action mécanique d'un corps 1 sur corps 2 par rapport au repère R_g est :

La somme de ces deux produits scalaire est appelée :

Remarque : Pour calculer le comoment d'un torseur cinématique et d'un torseur sthénique, on fait la somme des produits scalaires entre les résultantes et moments. Cependant ATTENTION

3.2.4- Puissance d'une force

Si l'action est une **force** $\vec{F}_{1 \rightarrow 2}$ appliquée en un Point A :
$$P(1 \rightarrow 2, R_g) = \left\{ \begin{matrix} \vec{F}_{1 \rightarrow 2} \\ \vec{0} \end{matrix} \right\}_A \otimes \left\{ \begin{matrix} \vec{\Omega}_{2/R_g} \\ \vec{V}_{A \in 2/R_g} \end{matrix} \right\}_A$$

Soit :

3.2.5- Puissance d'un couple

Si l'action est un **couple de vecteur** $\vec{C}_{1 \rightarrow 2}$:
$$P(1 \rightarrow 2, R_g) = \left\{ \begin{matrix} \vec{0} \\ \vec{C}_{1 \rightarrow 2} \end{matrix} \right\}_A \otimes \left\{ \begin{matrix} \vec{\Omega}_{2/R_g} \\ \vec{V}_{A \in 2/R_g} \end{matrix} \right\}_A$$

Soit :

4- Travail et puissance des actions de liaison

4.1- Puissances des actions de liaisons intérieures

Soit un ensemble S constitué de deux solides 1 et 2. La puissance des actions intérieures à l'ensemble S est la somme de la puissance de l'action de 1 sur 2 par rapport au repère R_g et de celle de 2 sur 1 par rapport au repère R_g .

On a donc : $P(\text{Int} \rightarrow S/R_g) = P(1 \rightarrow 2, R_g) + P(2 \rightarrow 1, R_g)$

Soit : $P(\text{Int} \rightarrow S/R_g) = \{T(1 \rightarrow 2)\} \otimes \{\mathcal{V}(2/R_g)\} + \{T(2 \rightarrow 1)\} \otimes \{\mathcal{V}(1/R_g)\}$

$P(\text{Int} \rightarrow S/R_g) = \{T(1 \rightarrow 2)\} \otimes \{\mathcal{V}(2/R_g)\} + \{T(1 \rightarrow 2)\} \otimes \{\mathcal{V}(R_g/1)\}$

$P(\text{Int} \rightarrow S/R_g) = \{T(1 \rightarrow 2)\} \otimes [\{\mathcal{V}(2/R_g)\} + \{\mathcal{V}(R_g/1)\}]$

Soit :

Conclusions La puissance des efforts intérieurs est :



4.2- Puissances des actions de liaisons extérieures

Soit un ensemble S constitué de plusieurs solides dont le solide 1 et un solide 0 extérieur à l'ensemble S. Tel que ce solide 0 est en liaison avec le solide 1.

La puissance de l'action extérieure du solide 0 sur le solide 1 par rapport au repère R_g est :

Le premier comoment est nul si la liaison est parfaite et le deuxième comoment est nul si le solide extérieur 0 est fixe dans le repère R_g .

Conclusions



Et :

