

# Théorème de l'énergie cinétique : cas des mouvements simples

## 1-Théorème de l'énergie cinétique : Enoncé

### 1.1- Démonstration pour une masse ponctuelle

Soit une masse ponctuelle au point P de masse m en mouvement à la vitesse  $\vec{V}_{P \in m/R_g}$  par rapport à un repère galiléen.

Si cette masse ponctuelle m est soumise à une force  $\vec{F}$  alors celle-ci fera varier la vitesse  $\vec{V}_{P \in m/R_g}$  conformément au PFD :  $\vec{F} = m \cdot \vec{a}_{P \in m/R_g} = m \left( \frac{d \vec{V}_{P \in m/R_g}}{dt} \right)_{R_g}$

Faisons le produit scalaire de cette égalité avec la vitesse  $\vec{V}_{P \in m/R_g}$ . On a alors :

$$\vec{F} \cdot \vec{V}_{P \in m/R_g} = m \left( \frac{d \vec{V}_{P \in m/R_g}}{dt} \right)_{R_g} \cdot \vec{V}_{P \in m/R_g} = \frac{d \frac{1}{2} \cdot m \cdot \vec{V}_{P \in m/R_g}^2}{dt}$$

Le terme :  $\frac{1}{2} \cdot m \cdot \vec{V}_{P \in m/R_g}^2$  est homogène à une énergie. Cette énergie est due à la vitesse de la masse ponctuelle m dans le repère galiléen  $R_g$ . **Il s'agit donc de l'énergie cinétique de la masse m dans son mouvement par rapport au repère  $R_g$ .**

Le terme  $\vec{F} \cdot \vec{V}_{P \in m/R_g}$  fait donc varier l'énergie cinétique. Il s'agit donc d'un échange d'énergie avec l'extérieur de la masse m. Il est homogène à une énergie par unité de temps, c'est-à-dire à une puissance. **Il s'agit donc de la puissance de la force  $\vec{F}$  par rapport au repère galiléen  $R_g$ .**

### 1.2- Enoncé pour une masse ponctuelle

La puissance des forces extérieures par rapport à un repère galiléen s'appliquant sur une masse ponctuelle au point P est égale à la variation par rapport au temps de l'énergie cinétique par rapport à ce même repère galiléen.

$$\Sigma \vec{F}_{Ext} \cdot \vec{V}_{P \in m/R_g} = \frac{d E_c(m/R_g)}{dt} \quad \text{Où :} \quad E_c(m/R_g) = \frac{1}{2} m \cdot \vec{V}_{P \in m/R_g}^2$$

### 1.3- Généralisation à un solide

Un solide  $S_i$  de masse m peut se décomposer en une infinité de petite masses ponctuelles dm situées en P pour lesquelles on a :  $m = \iiint_{S_i} dm$ . La somme de toutes les égalités liées au théorème de l'énergie cinétique appliqué à toutes les masses dm donne alors :

$$\iiint_{S_i} \vec{F}_{Ext} \cdot \vec{V}_{P \in S/R_g} + \iiint_{S_i} \vec{F}_{Int} \cdot \vec{V}_{P \in S/R_g} = \iiint_{S_i} \frac{d E_c(m/R_g)}{dt} = \frac{d \iiint_{S_i} E_c(dm/R_g)}{dt}$$

A partir du principe des actions mutuelles, On montre pour un solide que :  $\iiint_{S_i} \vec{F}_{Int} \cdot \vec{V}_{P \in S/R_g} = 0$

$$\text{D'autre part : } \iiint_{S_i} \vec{F}_{Ext} \cdot \vec{V}_{P \in S/R_g} = \Sigma P(Ext \rightarrow S_i/R_g) \quad \text{et :} \quad \iiint_{S_i} E_c(dm/R_g) = E_c(S_i/R_g)$$

On a donc pour un solide  $S_i$  :

$$\Sigma P(Ext \rightarrow S_i/R_g) = \frac{d E_c(S_i/R_g)}{dt}$$

## 1.4- Généralisation à un ensemble de solides

Pour un système S constitué d'un ensemble de solides indéformables  $S : S = \sum_{i=1}^n S_i$ .

L'énergie cinétique de ce système est la somme des énergies cinétiques de chacun des solides :

$$E_C(S/R_g) = \sum_{i=1}^n E_C(S_i/R_g)$$

Prenons l'exemple d'un système S constitué de deux solides  $S_1$  et  $S_2$  :

$$\sum_{i=1}^2 \sum P(\text{Ext}_{S_i} \rightarrow S_i/R_g) = \sum P(\text{Ext}_S \rightarrow S_1/R_g) + P(S_2 \rightarrow S_1/R_g) + \sum P(\text{Ext}_S \rightarrow S_2/R_g) + P(S_1 \rightarrow S_2/R_g)$$

$$\sum_{i=1}^2 \sum P(\text{Ext}_{S_i} \rightarrow S_i/R_g) = \sum P(\text{Ext}_S \rightarrow S/R_g) + P(S_2 \rightarrow S_1/R_g) + P(S_1 \rightarrow S_2/R_g)$$

Le terme  $P(S_2 \rightarrow S_1/R_g) + P(S_1 \rightarrow S_2/R_g)$  est appelé la puissance des inter-efforts du système constitué des deux solides, ou puissance des actions intérieures du système. On la note :  $P(\text{Int}_S \rightarrow S/R_g)$ .

On obtient alors :

$$\sum_{i=1}^2 \sum P(\text{Ext}_{S_i} \rightarrow S_i/R_g) = \sum P(\text{Ext}_S \rightarrow S/R_g) + P(\text{Int}_S \rightarrow S/R_g)$$

On montre de la même manière en généralisant à un système S constitué de n solides  $S_i$  :

$$\sum_{i=1}^n \sum P(\text{Ext}_{S_i} \rightarrow S_i/R_g) = \sum P(\text{Ext}_S \rightarrow S/R_g) + \sum P(\text{Int}_S \rightarrow S/R_g)$$

Donc pour un système S constitué d'un ensemble de solides si on note :

☞  $\sum P(\text{Ext} \rightarrow S/R_g)$  et  $\sum P(\text{Int} \rightarrow S/R_g)$  les sommes des puissances des actions extérieures et intérieures au système S, par rapport au repère Galiléen  $R_g$ .

☞  $E_C(S/R_g)$  l'énergie cinétique du système S par rapport au repère  $R_g$ .

Alors le théorème de l'énergie cinétique s'écrit :

$$\sum P(\text{Ext} \rightarrow S/R_g) + \sum P(\text{Int} \rightarrow S/R_g) = \frac{d E_C(S/R_g)}{dt}$$

## 2- Calcul de l'énergie cinétique

Soit un solide S décomposé en une infinité de petite masse ponctuelles  $dm$  situées en P. On a alors :

$$m = \iiint_S dm \quad \text{et :} \quad E_C(S/R_g) = \iiint_S E_C(dm/R_g) = \iiint_S \frac{1}{2} \overrightarrow{V_{P \in S/R_g}}^2 \cdot dm$$

### 2.1- Cas d'un solide en translation

Pour un solide en translation quelque soit les points P et A on a :  $\overrightarrow{V_{P \in S/R_g}} = \overrightarrow{V_{A \in S/R_g}}$

On en déduit :

$$E_C(S/R_g) = \iiint_S \frac{1}{2} \overrightarrow{V_{A \in S/R_g}}^2 \cdot dm = \frac{1}{2} \overrightarrow{V_{A \in S/R_g}}^2 \cdot \iiint_S dm$$

Donc :

$$\forall \text{ le point A : } E_C(S/R_g) = \frac{1}{2} m \cdot \overrightarrow{V_{A \in S/R_g}}^2$$

Cette relation est notamment valable avec le centre de gravité G du solide :  $E_C(S/R_g) = \frac{1}{2} m \cdot \overrightarrow{V_{G \in S/R_g}}^2$

## 2.2- Cas d'un solide en rotation autour d'un axe fixe dans la repère galiléen $R_g$

Soit un solide  $S$  en rotation d'axe  $\Delta$  telle que la vitesse de rotation est  $\omega$ .

Quelque soit le point  $P$  de  $S$  il existe un point  $P'$  défini comme le projeté orthogonal du point  $P$  sur l'axe  $\Delta$ . Le segment  $\overline{PP'}$  est alors le rayon de la trajectoire circulaire de  $P$  ( $T_{P \in S/R_g}$ ) défini par la rotation.

Quelques soit le point  $P$  on a alors :  $\vec{V}_{P \in S/R_g} = \vec{V}_{P' \in S/R_g} + \overline{PP'} \wedge \vec{\Omega}(S/R_g)$

Or le point  $P'$  étant sur l'axe  $\Delta$  :  $\vec{V}_{P' \in S/R_g} = \vec{0}$  donc :  $\vec{V}_{P \in S/R_g} = \overline{PP'} \wedge \vec{\Omega}(S/R_g)$

D'autre part :  $\vec{\Omega}(S/R_g) \perp \overline{PP'}$  donc :  $\vec{V}_{P \in S/R_g}^2 = \|\overline{PP'}\|^2 \cdot \|\vec{\Omega}(S/R_g)\|^2$

Par conséquent :  $E_C(S/R_g) = \iiint_S \frac{1}{2} \|\overline{PP'}\|^2 \cdot \|\vec{\Omega}(S/R_g)\|^2 dm$

Or :  $\|\vec{\Omega}(S/R_g)\| = \omega$  quelque soit le point  $P$

Et :  $\overline{PP'}$  est un rayon.

Donc si on note  $r$  ce rayon on a :  $E_C(S/R_g) = \iiint_S \frac{1}{2} r^2 \cdot \omega^2 dm$

$$E_C(S/R_g) = \frac{1}{2} \cdot \left( \iiint_S r^2 \cdot dm \right) \cdot \omega^2$$

Donc si un solide  $S$  est en rotation d'axe  $\Delta$  alors son énergie cinétique dans le repère  $R_g$  est :

$$E_C(S/R_g) = \frac{1}{2} \cdot I_\Delta(S) \cdot \omega^2$$

Où :  $\Rightarrow I_\Delta$  est le moment d'inertie de  $S$  par rapport à  $\Delta$

$\Rightarrow \omega$  est la vitesse de rotation de  $S$  par rapport à  $R_g$

## 2.3- Cas de plusieurs solides

Si un système  $S$  est constitué de  $n$  solides  $S_i$  :  $S = \sum_{i=1}^n S_i$  alors l'énergie cinétique du système par rapport au repère  $R_g$  est la somme des énergies cinétiques de chacun de ces solides par rapport à  $R_g$ .

$$E_C(S/R_g) = \sum_{i=1}^n E_C(S_i/R_g)$$

## 3- Puissance d'une action mécanique

### 3.1- Action mécanique

Une action mécanique d'un corps  $S_1$  sur un autre corps  $S_2$  est en générale la somme sur une surface  $\Sigma$  d'une pression répartie  $\vec{p}(\vec{P})$ , ou sur un volume  $V$  d'une charge de densité  $\vec{g}(\vec{P})$ , variable ou constante en fonction du point  $P$ . L'action mécanique qui résulte de cette charge répartie peut être modélisée par le torseur dont les éléments de réduction en  $A$  sont pour :

$\Rightarrow$  La résultante  $R(\vec{1} \rightarrow \vec{2})$  tel que :  $\vec{R}(\vec{1} \rightarrow \vec{2}) = \iint_{\Sigma} \vec{p}(\vec{P}) \cdot d\vec{s}$  ou  $= \iiint_V \vec{g}(\vec{P}) \cdot d\vec{v}$

$\Rightarrow$  Le moment en  $A$   $\mathcal{M}_A(\vec{1} \rightarrow \vec{2})$  tel que :  $\vec{\mathcal{M}}_A(\vec{1} \rightarrow \vec{2}) = \iint_{\Sigma} \vec{AP} \wedge \vec{p}(\vec{P}) \cdot d\vec{s}$  ou  $= \iiint_V \vec{AP} \wedge \vec{g}(\vec{P}) \cdot d\vec{v}$

## 3.2- Puissance d'une action mécanique

### 3.2.1- Définition

La puissance d'une action mécanique sur d'un corps 1 sur un solide 2 par rapport au repère  $R_g$  est la somme des puissances des forces élémentaires créées par la charge répartie de densité  $p(P)$

$$\text{On a donc : } P(1 \rightarrow 2/R_g) = \iint_{\Sigma} \vec{p(P)} \cdot \vec{V_{P \in 2/R_g}} ds$$

### 3.2.2- Démonstration

Quelque soit les points A et P on a :  $\vec{V_{P \in 2/R_g}} = \vec{V_{A \in 2/R_g}} + \vec{\Omega(2/R_g)} \wedge \vec{AP}$

$$\text{Donc : } P(1 \rightarrow 2/R_g) = \iint_{\Sigma} p(P) \cdot [\vec{V_{A \in 2/R_g}} + \vec{\Omega(2/R_g)} \wedge \vec{AP}] \cdot ds$$

$$P(1 \rightarrow 2/R_g) = \iint_{\Sigma} p(P) \cdot \vec{V_{A \in 2/R_g}} \cdot ds + \iint_{\Sigma} p(P) \cdot \vec{\Omega(2/R_g)} \wedge \vec{AP} \cdot ds$$

$$P(1 \rightarrow 2/R_g) = \vec{V_{A \in 2/R_g}} \cdot \iint_{\Sigma} p(P) \cdot ds + \iint_{\Sigma} \vec{\Omega(2/R_g)} \cdot \vec{AP} \wedge p(P) \cdot ds$$

$$P(1 \rightarrow 2/R_g) = \vec{V_{A \in 2/R_g}} \cdot \iint_{\Sigma} p(P) \cdot ds + \vec{\Omega(2/R_g)} \cdot \iint_{\Sigma} \vec{AP} \wedge p(P) \cdot ds$$

Or:  $\iint_{\Sigma} p(P) \cdot ds = R(1 \rightarrow 2)$  est la résultante de l'action de 1 sur 2

$$\iint_{\Sigma} \vec{AP} \wedge p(P) \cdot ds = \mathcal{M}_A(1 \rightarrow 2) \text{ est le moment au point A de l'action de 1 sur 2}$$

### 3.2.3- Conclusion

La puissance d'une action mécanique d'un corps 1 sur corps 2 par rapport au repère  $R_g$  est :

$$P(1 \rightarrow 2/R_g) = \vec{V_{A \in 2/R_g}} \cdot \vec{R(1 \rightarrow 2)} + \vec{\Omega(2/R_g)} \cdot \mathcal{M}_A(1 \rightarrow 2)$$

La somme de ces deux produits scalaire est appelée :

**Le comoment du torseur de l'action mécanique (torseur sthénique) de 1 sur 2 par le torseur cinématique de 2 par rapport au repère  $R_g$ .**

$$P(1 \rightarrow 2/R_g) = \{T(1 \rightarrow 2)\} \otimes \{V(2/R_g)\}$$

Remarque : Pour calculer le comoment d'un torseur cinématique et d'un torseur sthénique, on fait la somme des produits scalaires entre les résultantes et moments. Cependant ATTENTION

### 3.2.4- Puissance d'une force

$$\text{Si l'action est une force } \vec{F_{1 \rightarrow 2}} \text{ appliquée en un Point A : } P(1 \rightarrow 2, R_g) = \left\{ \begin{array}{c} \vec{F_{1 \rightarrow 2}} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_A \otimes \left\{ \begin{array}{c} \vec{\Omega_{2/R_g}} \\ \vec{V_{A \in 2/R_g}} \end{array} \right\}_A$$

$$\text{Soit : } P(1 \rightarrow 2/R_g) = \vec{F_{1 \rightarrow 2}} \cdot \vec{V_{A \in 2/R_g}}$$

### 3.2.5- Puissance d'un couple

$$\text{Si l'action est un couple de vecteur } \vec{C_{1 \rightarrow 2}} : P(1 \rightarrow 2, R_g) = \left\{ \begin{array}{c} \vec{0} \\ \vec{C_{1 \rightarrow 2}} \end{array} \right\}_A \otimes \left\{ \begin{array}{c} \vec{\Omega_{2/R_g}} \\ \vec{V_{A \in 2/R_g}} \end{array} \right\}_A$$

$$\text{Soit : } P(1 \rightarrow 2/R_g) = \vec{C_{1 \rightarrow 2}} \cdot \vec{\Omega_{2/R_g}}$$

## 4- Travail et puissance des actions de liaison

### 4.1- Puissances des actions de liaisons intérieures

Soit un ensemble S constitué de deux solides 1 et 2. La puissance des actions intérieures à l'ensemble S est la somme de la puissance de l'action de 1 sur 2 par rapport au repère  $R_g$  et de celle de 2 sur 1 par rapport au repère  $R_g$ .

On a donc :  $P(\text{Int} \rightarrow S/R_g) = P(1 \rightarrow 2/R_g) + P(2 \rightarrow 1/R_g)$

Soit :  $P(\text{Int} \rightarrow S/R_g) = \{T(1 \rightarrow 2)\} \otimes \{V(2/R_g)\} + \{T(2 \rightarrow 1)\} \otimes \{V(1/R_g)\}$

$$P(\text{Int} \rightarrow S/R_g) = \{T(1 \rightarrow 2)\} \otimes \{V(2/R_g)\} + \{T(1 \rightarrow 2)\} \otimes \{V(R_g/1)\}$$

$$P(\text{Int} \rightarrow S/R_g) = \{T(1 \rightarrow 2)\} \otimes [\{V(2/R_g)\} + \{V(R_g/1)\}]$$

Soit :  $P(\text{Int} \rightarrow S/R_g) = \{T(1 \rightarrow 2)\} \otimes \{V(2/1)\}$

**Conclusions** La puissance des efforts intérieurs est :

☞ **Indépendante du repère de référence**

☞ **Nulle si ces efforts sont ceux de liaisons parfaites**

### 4.2- Puissances des actions de liaisons extérieures

Soit un ensemble S constitué de plusieurs solides dont le solide 1 et un solide 0 extérieur à l'ensemble S. Tel que ce solide 0 est en liaison avec le solide 1.

La puissance de l'action extérieure du solide 0 sur le solide 1 par rapport au repère  $R_g$  est :

$$P(0 \rightarrow 1/R_g) = \{T(0 \rightarrow 1)\} \otimes \{V(1/R_g)\}$$

$$P(0 \rightarrow 1/R_g) = \{T(0 \rightarrow 1)\} \otimes \{V(1/0)\} + \{T(0 \rightarrow 1)\} \otimes \{V(0/R_g)\}$$

Le premier comoment est nul si la liaison est parfaite et le deuxième comoment est nul si le solide extérieur 0 est fixe dans le repère  $R_g$ .

**Conclusions**

**Les puissances des efforts extérieurs par rapport au repère de référence sont nulles si elles sont dues à des liaisons :**

☞ **Parfaites**

Et :

☞ **Avec des solides fixes par rapport au repère de référence**