Manipulateur industriel : Corrigé

1- Cinématique.

1.1- Taux de rotation

☞ La liaison entre 1 et 0 étant une pivot d'axe $(A, \overrightarrow{Z_1})$ avec le paramètre angulaire α : $\mathbf{\overrightarrow{\Omega_{1/0}} = \dot{\alpha}.\overrightarrow{Z_1}}$

☞ ABEF étant un parallélogramme déformable, on a toujours (AB) // (EF) A et B étant fixe sur 1 et E et F étant fixes sur 3, on a : $\mathbf{\overrightarrow{\Omega_{3/0}} = \overrightarrow{\Omega_{1/0}}}$ Soit : $\mathbf{\overrightarrow{\Omega_{3/0}} = \dot{\alpha}.\overrightarrow{Z_1}}$

☞ ABEF étant un parallélogramme déformable, (AE) // (BF). Or A et E étant fixe sur 0 et B et F étant fixes sur 2, le mouvement de 2 par rapport à 0 est une translation circulaire. Donc : $\mathbf{\overrightarrow{\Omega_{2/0}} = \vec{0}}$

☞ Le corps du vérin 4 étant en liaison glissière par rapport au bâti 0 : $\mathbf{\overrightarrow{\Omega_{4/0}} = \vec{0}}$

☞ La tige 5 étant en glissière par rapport à 4 : $\overrightarrow{\Omega_{5/4}} = \vec{0}$ Or : $\overrightarrow{\Omega_{5/0}} = \overrightarrow{\Omega_{5/4}} + \overrightarrow{\Omega_{4/0}}$ Donc : $\mathbf{\overrightarrow{\Omega_{5/0}} = \vec{0}}$

1.2- Relation entre les paramètres

☞ On a : $\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HD} + \overrightarrow{DA} = \vec{0}$ Soit : $x.\overrightarrow{X_0} - h.\overrightarrow{Y_0} + y.\overrightarrow{Y_0} + r.\overrightarrow{X_1} = \vec{0}$

Soit encore : $x.\overrightarrow{X_0} - h.\overrightarrow{Y_0} + y.\overrightarrow{Y_0} + r.\cos\alpha.\overrightarrow{X_0} + r.\sin\alpha.\overrightarrow{Y_0} = \vec{0}$

En projetant sur les axes $\overrightarrow{X_0}$ et $\overrightarrow{Y_0}$ on obtient les relations : $\mathbf{x = -r.\cos\alpha}$

Et : $\mathbf{y = h - r.\sin\alpha}$

1.3- Vecteurs vitesses

☞ $\overrightarrow{V_{C\in 1/0}} = \overrightarrow{V_{A\in 1/0}} + \overrightarrow{CA} \wedge \overrightarrow{\Omega_{1/0}}$ or A étant le centre de la pivot entre 1 et 0 : $\overrightarrow{V_{A\in 1/0}} = \vec{0}$ Donc :

$\overrightarrow{V_{C\in 1/0}} = d.\overrightarrow{X_1} \wedge \dot{\alpha}.\overrightarrow{Z_1}$ Donc : $\mathbf{\overrightarrow{V_{C\in 1/0}} = -d.\dot{\alpha}.\overrightarrow{Y_1}}$

☞ $\overrightarrow{V_{D\in 1/0}} = \overrightarrow{V_{A\in 1/0}} + \overrightarrow{DA} \wedge \overrightarrow{\Omega_{1/0}}$ or A étant le centre de la pivot entre 1 et 0 : $\overrightarrow{V_{A\in 1/0}} = \vec{0}$ Donc :

$\overrightarrow{V_{D\in 1/0}} = r.\overrightarrow{X_1} \wedge \dot{\alpha}.\overrightarrow{Z_1}$ Donc : $\mathbf{\overrightarrow{V_{D\in 1/0}} = -r.\dot{\alpha}.\overrightarrow{Y_1}}$

☞ D étant le centre de la rotule entre 1 et 5 : $\overrightarrow{V_{D\in 5/0}} = \overrightarrow{V_{D\in 1/0}}$

D'autre part le mouvement de 5 par rapport à 0 est une translation ($\overrightarrow{\Omega_{5/0}} = \vec{0}$)

Donc : $\overrightarrow{V_{I\in 5/0}} = \overrightarrow{V_{D\in 5/0}} = \overrightarrow{V_{D\in 1/0}}$ Soit : $\mathbf{\overrightarrow{V_{I\in 5/0}} = -r.\dot{\alpha}.\overrightarrow{Y_1}}$

☞ $\overrightarrow{V_{G1\in 1/0}} = \overrightarrow{V_{A\in 1/0}} + \overrightarrow{G_1A} \wedge \overrightarrow{\Omega_{1/0}}$ or A étant le centre de la pivot entre 1 et 0 : $\overrightarrow{V_{A\in 1/0}} = \vec{0}$ Donc :

$\overrightarrow{V_{G1\in 1/0}} = -\dfrac{\ell - d}{2}.\overrightarrow{X_1} \wedge \dot{\alpha}.\overrightarrow{Z_1}$ Donc : $\mathbf{\overrightarrow{V_{G1\in 1/0}} = \dfrac{\ell - d}{2}.\dot{\alpha}.\overrightarrow{Y_1}}$

☞ B étant le centre de la pivot entre 2 et 1 : $\overrightarrow{V_{B\in 2/0}} = \overrightarrow{V_{B\in 1/0}}$

D'autre part le mouvement de 2 par rapport à 0 est une translation ($\overrightarrow{\Omega_{2/0}} = \vec{0}$)

Donc : $\overrightarrow{V_{G2\in 2/0}} = \overrightarrow{V_{B\in 2/0}} = \overrightarrow{V_{B\in 1/0}}$ On a également : $\overrightarrow{V_{B\in 1/0}} = \overrightarrow{V_{A\in 1/0}} + \overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{\Omega_{1/0}}$

Avec A centre de la liaison pivot entre 1 et 0 . Soit $\overrightarrow{V_{A\in 1/0}} = \vec{0}$

D'où : $\overrightarrow{V_{G2\in 2/0}} = \overrightarrow{V_{B\in 1/0}} = -\ell.\overrightarrow{X_1} \wedge \dot{\alpha}.\overrightarrow{Z_1}$ Soit : $\mathbf{\overrightarrow{V_{G2\in 2/0}} = \ell.\dot{\alpha}.\overrightarrow{Y_1}}$

☞ $\overrightarrow{V_{G3\in 3/0}} = \overrightarrow{V_{E\in 3/0}} + \overrightarrow{G_3E} \wedge \overrightarrow{\Omega_{3/0}}$ or E étant le centre de la pivot entre 3 et 0 : $\overrightarrow{V_{E\in 3/0}} = \vec{0}$ Donc :

$\overrightarrow{V_{G3\in 3/0}} = -\dfrac{\ell}{2}.\overrightarrow{X_1} \wedge \dot{\alpha}.\overrightarrow{Z_1}$ Donc : $\mathbf{\overrightarrow{V_{G3\in 3/0}} = \dfrac{\ell}{2}.\dot{\alpha}.\overrightarrow{Y_1}}$

☞ L'objet 7 étant fixe par rapport au support 2 : $\overrightarrow{V_{G\in 7/0}} = \overrightarrow{V_{G\in 2/0}}$.

D'autre part le mouvement de 2 par rapport à 0 est une translation $(\overrightarrow{\Omega_{2/0}} = \vec{0})$

D'où : $\overrightarrow{V_{G\in 7/0}} = \overrightarrow{V_{G\in 2/0}} = \overrightarrow{V_{G2\in 2/0}}$ Soit : $\mathbf{\overrightarrow{V_{G\in 7/0}} = \ell.\dot{\alpha}.\overrightarrow{Y_1}}$

☞ $\overrightarrow{V_{D\in 5/4}} = \left(\frac{d\,\overrightarrow{HD}}{dt}\right)_{R_4} = \left(\frac{d\,\overrightarrow{HD}}{dt}\right)_{R_0}$ car : $\overrightarrow{\Omega_{4/0}} = \vec{0}$ or : $\overrightarrow{HD} = y.\overrightarrow{Y_0}$ Donc : $\overrightarrow{V_{D\in 5/4}} = \dot{y}.\overrightarrow{Y_0}$

D'autre part comme : $y = h - r.\sin\alpha$ on en déduit : $\mathbf{\overrightarrow{V_{D\in 5/4}} = -r.\dot{\alpha}.\cos\alpha.\overrightarrow{Y_0}}$

☞ $\overrightarrow{V_{H\in 4/0}} = \left(\frac{d\,\overrightarrow{AH}}{dt}\right)_{R_0}$ Ayant : $\overrightarrow{AH} = x.\overrightarrow{X_0} - h.\overrightarrow{Y_0}$ On a donc : $\overrightarrow{V_{H\in 4/0}} = \dot{x}.\overrightarrow{X_0}$

D'autre part comme : $x = -r.\cos\alpha$ on en déduit : $\mathbf{\overrightarrow{V_{H\in 4/0}} = r.\dot{\alpha}.\sin\alpha.\overrightarrow{X_0}}$

☞ Le mouvement de 4 par rapport à 0 est une translation : $(\overrightarrow{\Omega_{4/0}} = \vec{0})$

donc : $\overrightarrow{V_{J\in 4/0}} = \overrightarrow{V_{H\in 4/0}}$ Soit : $\mathbf{\overrightarrow{V_{J\in 4/0}} = r.\dot{\alpha}.\sin\alpha.\overrightarrow{X_0}}$

2- Géométrie des masses

☞ Le bras 1 a une masse m_1 et un centre de gravité G_1. Il est assimilé à une barre de longueur $(\ell + d)$. En notant I_{1G1Z} le moment d'inertie du bras 1 par rapport à l'axe $(G_1, \overrightarrow{Z_1})$ on a : $I_{1G1Z} = \frac{m_1.(\ell + d)^2}{12}$

Du théorème de Huygens on en déduit : $I_{1AZ} = I_{1G1Z} + m_1.\overrightarrow{AG_1}^2 = \frac{m_1.(\ell + d)^2}{12} + m_1.\left(\frac{\ell - d}{2}\right)^2$

Soit : $I_{1AZ} = \frac{m_1}{12}\left(\ell^2 + d^2 + 2.\ell.d + 3.\ell^2 + 3.d^2 - 6.\ell.d\right) = \frac{m_1}{12}\left(4.\ell^2 + 4.d^2 - 4.\ell.d\right)$

On en déduit : $\mathbf{I_{1AZ} = \frac{m_1.(\ell^2 + d^2 - \ell.d)}{3}}$

☞ Le contrepoids 6 fixé en C à l'extrémité du bras 1 est assimilé à une masse ponctuelle m_6.

Donc : $I_{6AZ} = m_6.\overrightarrow{AC}^2$ On en déduit : $\mathbf{I_{6AZ} = m_6.d^2}$

☞ La biellette 3 a une masse m_3 et peut être assimilée à une barre de longueur $\ell = EF$.

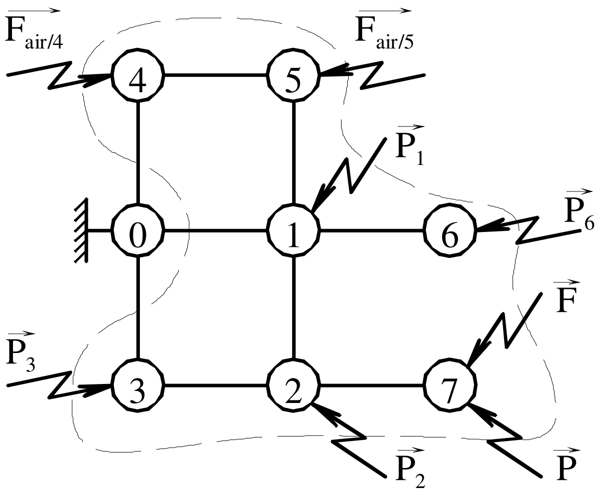
En notant I_{3G3Z} le son moment d'inertie par rapport à l'axe $(G_3, \overrightarrow{Z_1})$ on a : $I_{3G3Z} = \frac{m_3.\ell^2}{12}$

Du théorème de Huygens : $I_{3EZ} = I_{3G3Z} + m_3.\overrightarrow{EG_3}^2 = \frac{m_3.\ell^2}{12} + m_3.\left(\frac{\ell}{2}\right)^2 = m_3.\ell^2.\left(\frac{1}{12} + \frac{1}{4}\right)$

On en déduit : $I_{3EZ} = \mathbf{\frac{m_3.\ell^2}{3}}$

3- Equation différentielle du mouvement du manipulateur industriel

3.1- Graphe de structure



3.2- Energie cinétique

☞ Le bras 1 étant en rotation autour de l'axe $(A, \overrightarrow{Z_1})$ par rapport au bâti 0 son énergie cinétique est :

$E_C(1/R_0) = \frac{1}{2} \, . \, I_{1AZ} \, . \, \overrightarrow{\Omega_{1/0}}^2$ Soit :

$$\mathbf{E_C(1/R_0) = \frac{1}{2} \, . \, \dot{\alpha}^2 \, . \, \frac{m_1.(\ell^2 + d^2 - \ell.d)}{3}}$$

☞ Le support 2 étant en translation par rapport au bâti 0 son énergie cinétique est :

$E_C(2/R_0) = \frac{1}{2} \, . \, m_2 \, . \, \overrightarrow{V_{G2\in 2/0}}^2$ Donc :

$$\mathbf{E_C(2/R_0) = \frac{1}{2} \, . \, \dot{\alpha}^2 \, . \, m_2.\ell^2}$$

☞ La biellette 3 étant en rotation autour de $(E, \overrightarrow{Z_1})$ par rapport au bâti 0 son énergie cinétique est :

$E_C(3/R_0) = \frac{1}{2} \, . \, I_{3EZ} \, . \, \overrightarrow{\Omega_{3/0}}^2$ Donc : $\mathbf{E_C(3/R_0) = \frac{1}{2} \, . \, \dot{\alpha}^2 \, . \, \frac{m_3.\ell^2}{3}}$

☞ Le contrepoids 6 étant fixe sur 1 qui est en rotation autour de l'axe $(A, \overrightarrow{Z_1})$ par rapport au bâti 0 son énergie cinétique est : $E_C(6/R_0) = \frac{1}{2} \, . \, I_{6AZ} \, . \, \overrightarrow{\Omega_{1/0}}^2$ Donc : $\mathbf{E_C(6/R_0) = \frac{1}{2} \, . \, \dot{\alpha}^2 \, . \, m_6.d^2}$

☞ L'objet 7 étant fixe sur 2 qui est en translation par rapport au bâti 0 son énergie cinétique est :

$E_C(7/R_0) = \frac{1}{2} \, . \, m \, . \, \overrightarrow{V_{G\in 7/0}}^2$ Donc : $\mathbf{E_C(7/R_0) = \frac{1}{2} \, . \, \dot{\alpha}^2 \, . \, m.\ell^2}$

☞ On néglige l'inertie du vérin {4,5} donc : $\mathbf{E_C(4/R_0) \approx E_C(5/R_0) \approx 0}$

Le système S étant constitué des solides 1 à 7 : $E_C(S/R_0) = \sum_{i=1}^{7} E_C(i/R_0)$

Donc : $$E_C(S/R_0) = \frac{1}{2}.\dot{\alpha}^2.\frac{m_1.(\ell^2 + d^2 - \ell.d)}{3} + \frac{1}{2}.\dot{\alpha}^2.m_2.\ell^2 + \frac{1}{2}.\dot{\alpha}^2.\frac{m_3.\ell^2}{3} + \frac{1}{2}.\dot{\alpha}^2.m_6.d^2 + \frac{1}{2}.\dot{\alpha}^2.m.\ell^2$$

On en déduit : $$E_C(S/R_0) = \frac{1}{2} \, . \, \dot{\alpha}^2 \, . \left[\ell^2 \, . \left(\frac{m_1 + m_3}{3} + m_2 + m \right) + d^2 \, . \left(\frac{m_1}{3} + m_6 \right) - \ell.d \, . \, \frac{m_1}{3} \right]$$ Soit :

$\mathbf{E_C(S/R_0) = \frac{1}{2}.I_{equi}.\dot{\alpha}^2}$ avec : $\mathbf{I_{equi.} = \ell^2.\left(\frac{m_1 + m_3}{3} + m_2 + m \right) + d^2.\left(\frac{m_1}{3} + m_6 \right) - \ell.d.\frac{m_1}{3}}$

3.3- Puissances galiléennes

Faisons un bilan des actions mécaniques extérieures s'appliquant sur le système Σ

☞ Les actions du bâti 0 dues aux liaisons en A, E et H du bâti 0 avec les solides 1, 3 et 4.

☞ Les poids $\overrightarrow{P_i}$ des 7 solides S_i : Forces $\overrightarrow{P_i} = - m_i.g.\overrightarrow{Y_0}$ appliquées en G_i.

☞ L'action de l'air comprimé sur le corps 4 du vérin : Force $\overrightarrow{F_{a/4}} = p.S.\overrightarrow{Y_0}$ appliquée en J

☞ L'action de l'air comprimé sur la tige 5 du vérin : Force $\overrightarrow{F_{a/5}} = - p.S.\overrightarrow{Y_0}$ appliquée en I

☞ L'action de l'opérateur : Force $\overrightarrow{F} = F.\overrightarrow{Y_1}$ appliquée au point P

Calculons les puissances de ces actions extérieures appliquées sur Σ dans son mouvement par rapport à R_0 : $\Sigma\, P(Ext\rightarrow\Sigma,R_0)$

☞ Les puissances des actions de 0 sur 1, 3 et 4 sont nulles car elles sont dues à des actions de liaisons parfaites avec le bâti 0 : $\mathbf{P(0\rightarrow1,R_0) = P(0\rightarrow3,R_0) = P(0\rightarrow4,R_0) = 0}$

☞ Puissance du poids du bras 1 : $P(\overrightarrow{P_1},R_0) = \overrightarrow{P_1}\cdot\overrightarrow{V_{G1\in 1/0}} = -\,m_1\cdot g\cdot\overrightarrow{Y_0}\cdot\dfrac{\ell-d}{2}\cdot\dot{\alpha}\cdot\overrightarrow{Y_1}$

On en déduit : $\mathbf{P(\overrightarrow{P_1},R_0) = -\,m_1\cdot g\cdot\dfrac{\ell-d}{2}\cdot\dot{\alpha}\cdot\cos\alpha}$

☞ Puissance du poids du support 2 : $P(\overrightarrow{P_2},R_0) = \overrightarrow{P_2}\cdot\overrightarrow{V_{G2\in 1/0}} = -\,m_2\cdot g\cdot\overrightarrow{Y_0}\cdot\ell\cdot\dot{\alpha}\cdot\overrightarrow{Y_1}$

On en déduit : $\mathbf{P(\overrightarrow{P_2},R_0) = -\,m_2\cdot g\cdot\ell\cdot\dot{\alpha}\cdot\cos\alpha}$

☞ Puissance du poids de la biellette 3 : $P(\overrightarrow{P_3},R_0) = \overrightarrow{P_3}\cdot\overrightarrow{V_{G3\in 1/0}} = -\,m_3\cdot g\cdot\overrightarrow{Y_0}\cdot\dfrac{\ell}{2}\cdot\dot{\alpha}\cdot\overrightarrow{Y_1}$

On en déduit : $\mathbf{P(\overrightarrow{P_3},R_0) = -\,m_2\cdot g\cdot\dfrac{\ell}{2}\cdot\dot{\alpha}\cdot\cos\alpha}$

☞ Puissance du poids du vérin {4,5} négligé : $\mathbf{P(\overrightarrow{P_4},R_0) = P(\overrightarrow{P_5},R_0) = 0}$

☞ Puissance du poids du contrepoids 6 : $P(\overrightarrow{P_6},R_0) = \overrightarrow{P_6}\cdot\overrightarrow{V_{C\in 1/0}} = -\,m_6\cdot g\cdot\overrightarrow{Y_0}\cdot -\,d\cdot\dot{\alpha}\cdot\overrightarrow{Y_1}$

On en déduit : $\mathbf{P(\overrightarrow{P_6},R_0) = m_6\cdot g\cdot d\cdot\dot{\alpha}\cdot\cos\alpha}$

☞ Puissance du poids de l'objet 7 : $P(\overrightarrow{P},R_0) = \overrightarrow{P}\cdot\overrightarrow{V_{G\in 7/0}} = -\,m\cdot g\cdot\overrightarrow{Y_0}\cdot\ell\cdot\dot{\alpha}\cdot\overrightarrow{Y_1}$

On en déduit : $\mathbf{P(\overrightarrow{P},R_0) = -\,m\cdot g\cdot\ell\cdot\dot{\alpha}\cdot\cos\alpha}$

☞ Puissance de l'action de l'air sur 4 : $P(\overrightarrow{F_{a/4}},R_0) = \overrightarrow{F_{a/4}}\cdot\overrightarrow{V_{J\in 4/0}} = p\cdot S\cdot\overrightarrow{Y_0}\cdot r\cdot\dot{\alpha}\cdot\sin\alpha\cdot\overrightarrow{X_0}$

On en déduit : $\mathbf{P(\overrightarrow{F_{a/4}},R_0) = 0}$

☞ Puissance de l'action de l'air sur 5 : $P(\overrightarrow{F_{a/5}},R_0) = \overrightarrow{F_{a/5}}\cdot\overrightarrow{V_{I\in 5/0}} = p\cdot S\cdot\overrightarrow{Y_0}\cdot -\,r\cdot\dot{\alpha}\cdot\overrightarrow{Y_1}$

On en déduit : $\mathbf{P(\overrightarrow{F_{a/5}},R_0) = -\,p\cdot S\cdot r\cdot\dot{\alpha}\cdot\cos\alpha}$

☞ Puissance de l'opérateur sur 2 : $P(\overrightarrow{F}/R_0) = \overrightarrow{F}\cdot\overrightarrow{V_{P\in 2/0}} = F\cdot\overrightarrow{Y_1}\cdot\ell\cdot\dot{\alpha}\cdot\overrightarrow{Y_1}$

On en déduit : $\mathbf{P(\overrightarrow{F}/R_0) = F\cdot\ell\cdot\dot{\alpha}}$

On en déduit la somme des puissances de ces actions extérieures appliquées sur S dans son mouvement par rapport à R_0 :

$$\mathbf{\Sigma\, P_{Ext}(S/R_0) = \left[\, F.\ell\ -\left[\, g.\left(m_1.\frac{\ell-d}{2} + m_2.\ell + m_3.\frac{\ell}{2} + m.\ell - m_6.d\right) - p.S.r\,\right].\cos\alpha\,\right].\dot{\alpha}}$$

Le système S étant constitué d'un ensemble de solides en liaisons parfaites les uns avec les autres, la somme des puissances des actions intérieures à ce système est nulle : $\mathbf{\Sigma\, P(Int\rightarrow\Sigma,R_0) = 0}$

D'où la somme des puissances galiléennes $\Sigma P(\Sigma/R_0)$ des actions extérieures et intérieures de ce système Σ dans le repère R_0.

$$\Sigma\, P(\Sigma/R_0) = \Sigma\, P(Ext\rightarrow\Sigma,R_0)\ +\ \Sigma\, P(Int\rightarrow\Sigma,R_0)$$

$$\mathbf{\Sigma\, P(\Sigma/R_0) = \left[\, F.\ell\ -\left[\, g.\left(m_1.\frac{\ell-d}{2} + m_2.\ell + m_3.\frac{\ell}{2} + m.\ell - m_6.d\right) - p.S.r\,\right].\cos\alpha\,\right].\dot{\alpha}}$$

3.4- Application du théorème de l'énergie cinétique

Etant donné l'expression de l'énergie cinétique établie à la question 3.2, on en déduit sa dérivée par rapport au temps : $\dfrac{d\,E_C(S/R_0)}{dt} = \ddot{\alpha}\,.\,\dot{\alpha}\,.\,I_{equi}$

L'application du théorème de l'énergie cinétique à S donne donc :

$$\ddot{\alpha}\,.\,\dot{\alpha}\,.\,I_{equi} = \left[\,F.\ell\; - \left[\,g.\left(m_1.\frac{\ell-d}{2} + m_2.\ell + m_3.\frac{\ell}{2} + m.\ell - m_6.d\right) - p.S.r\,\right].\cos\alpha\,\right].\,\dot{\alpha}$$

Ce qui après simplification par $\dot{\alpha}$ donne l'équation différentielle (a) ci dessous :

$$\boldsymbol{\ddot{\alpha}\,.\,I_{equi} = F.\ell - \left[\,g.\left(m_1.\frac{\ell-d}{2} + m_2.\ell + m_3.\frac{\ell}{2} + m.\ell - m_6.d\right) - p.S.r\,\right].\cos\alpha}$$

4- Dimensionnement du mécanisme

4.1- Dimensionnement du contrepoids 6

On se place dans le cas où :
- ☞ L'opérateur n'exerce aucune action sur la poignée : $F = 0$
- ☞ Le vérin n'est pas alimenté en air comprimé : $p = 0$
- ☞ Il n'y a aucun objet sur le support 2 : $m = 0$

L'ensemble du manipulateur est en équilibre (aucun mouvement) : $\dot{\alpha} = \ddot{\alpha} = 0$

L'équation (a) ci-dessus devient donc : $0 = \left[\,g.\left(m_1.\frac{\ell-d}{2} + m_2.\ell + m_3.\frac{\ell}{2} - m_6.d\right)\right].\cos\alpha$

On en déduit : $\boldsymbol{m_6 = m_1.\frac{\ell-d}{2.d} + m_2.\frac{\ell}{d} + m_3.\frac{\ell}{2.d}}$

Soit : $\boldsymbol{m_6 = 100 \times \frac{2-1{,}25}{2\times 1{,}25} + 120 \times \frac{2}{1{,}25} + 60 \times \frac{2}{2\times 1{,}25} = 270\text{ kg}}$

4.2- Pression dans le vérin

On se place dans le cas où l'opérateur n'exerce aucune action sur la poignée : $F = 0$

L'ensemble du manipulateur est en équilibre (aucun mouvement) : $\dot{\alpha} = \ddot{\alpha} = 0$

L'équation (a) ci-dessus devient donc : $0 = g\,.\left(m_1.\frac{\ell-d}{2} + m_2.\ell + m_3.\frac{\ell}{2} + m.\ell - m_6.d\right) - p.S.r$

Or on sait que : $m_1.\frac{\ell-d}{2} + m_2.\ell + m_3.\frac{\ell}{2} - m_6.d = 0$ Donc : $0 = m\,.\,g\,.\,\ell - p\,.\,S\,.\,r$

On en déduit : $\boldsymbol{p = \frac{m\,.\,g\,.\,\ell}{S\,.\,r} = \frac{600\times 9{,}81\times 2}{30\,000\times 0{,}75} = 0{,}5232\text{ MPa} = 5{,}532\text{ b}}$

3.3- Effort pour une décélération de 0,75 m.s^{-2}

a- Sachant que : $m_1.\frac{\ell-d}{2} + m_2.\ell + m_3.\frac{\ell}{2} + m.\ell - m_6.d = 0$ et que : $0 = m\,.\,g\,.\,\ell - p\,.\,S\,.\,r$

L'équation (a) devient: $\ddot{\alpha}.I_{equi} = F\,.\,\ell$ On en déduit :

$\boldsymbol{F = \frac{\ddot{\alpha}}{\ell}\,.\,I_{equi}}$ avec : $\boldsymbol{I_{equi} = \ell^2.\left(\frac{m_1+m_3}{3} + m_2 + m\right) + d^2.\left(\frac{m_1}{3} + m_6\right) - \ell.d.\frac{m_1}{3}}$

Soit : $\boldsymbol{F = \frac{0{,}375}{2} \times \left[\,2^2\times\left(\frac{100+60}{3} + 120 + 600\right) + 1{,}25^2\times\left(\frac{100}{3} + 270\right) - 2\times 1{,}25\times\frac{100}{3}\,\right] = 653\text{ N}}$

Cette valeur d'effort (équivalente au poids d'un masse d'environ 65 kg) est élevée pour l'opérateur.

b- Dans ce cas on a toujours : $m_1.\frac{\ell - d}{2} + m_2.\ell + m_3.\frac{\ell}{2} - m_6.d = 0$

L'équation (a) devient alors : $\ddot{\alpha}.I_{equi} = F\,.\,\ell - (m.g.\ell - p.S.r).\cos\alpha$

D'autre part on souhaite réduire l'effort de l'opérateur de 90 % par rapport au cas précédent donc on souhaite avoir $F = \frac{1}{10}\cdot\frac{\ddot{\alpha}}{\ell}\,.\,I_{equi}$ On doit donc avoir : $\ddot{\alpha}.I_{equi} = \frac{\ddot{\alpha}}{10}\,.\,I_{equi} - (m.g.\ell - p.S.r).\cos\alpha$

Soit: $\frac{9.\ddot{\alpha}}{10}\,.\,I_{equi} = -(m.g.\ell - p.S.r).\cos\alpha$ Soit encore :

$$\mathbf{p = \frac{m\,.\,g\,.\,\ell}{S\,.\,r} + \frac{9.\ddot{\alpha}.I_{equi}}{10.\cos\alpha.S.r}} \quad \text{avec :} \quad \mathbf{I_{equi} = \ell^2.\left(\frac{m_1 + m_3}{3} + m_2 + m\right) + d^2.\left(\frac{m_1}{3} + m_6\right) - \ell.d.\frac{m_1}{3}}$$

Application numérique (pour $\alpha = 0$):

$$\mathbf{I_{equi} = 2^2\times\left(\frac{100 + 60}{3} + 120 + 600\right) + 1{,}25^2\times\left(\frac{100}{3} + 270\right) - 2\times1{,}25\times\frac{100}{3} = 3\,484\ kg.m^2}$$

$$\mathbf{p = \frac{600\times9{,}81\times2}{30\,000\times0{,}75} + \frac{9\times0{,}375\times3\,484}{10\times30\,000\times0{,}75} = 0{,}5232\ MPa + 0{,}0523\ MPa = 0{,}5755\ MPa = 5{,}575\ b}$$

Il est donc possible de réduire l'effort de l'opérateur en augmentant ou réduisant légèrement la pression d'alimentation su vérin nécessaire pour soulever la charge.

Le système industriel comporte pour cela un système qui asservie la variation de pression d'alimentation du vérin à l'effort qu'exerce l'opérateur sur la poignée du manipulateur industriel.