# Systèmes équivalents

## 1- Définition et intérêt du système équivalent

### 1.1- Définition

Un système équivalent doit remplir deux conditions quelque soit les vitesses des systèmes:

**☞ Avoir la même énergie cinétique que le système étudié**

**☞ Avoir les mêmes puissances que le système étudié**

### 1.2- Exemple

|  |  |
| --- | --- |
| Soit un système S constitué de deux arbres 1 (arbre moteur) et 2 liés au bâti 0 par deux liaisons pivot. Et une crémaillère liée au bâti par une liaison glissière. Les arbres 1 et 2 ont respectivement Im et I2 pour moment d’inertie par rapport aux axes, et la crémaillère 3 à une masse M3.  L’arbre 1 porte une roue dentée de rayon R1 engrenant avec la roue dentée portée par l’arbre 2 et de rayon R2. Enfin la crémaillère 3 est entrainée en translation par la roue dentée de l’arbre 2.  Ce système est soumis à trois actions extérieures : Deux couples de vecteurs et appliqués respectivement sur 1 et 2 et une force .  On note et les taux de rotation des arbres 1 et 2 et le vecteur vitesse de la translation de la crémaillère 3 par rapport au bâti. | **Système étudié :** |
| Le système équivalent se résume à un arbre E lié au bâti par une liaison pivot identique à celle entre le bâti et l’arbre 1. Cet arbre a le même taux de rotation par rapport au bâti que l’arbre 1 du système étudié.  Cet arbre équivalent a un moment d’inertie Ieq par rapport à son axe de rotation. Et s’applique sur cet arbre un couple résistant équivalent Creq. | **Système équivalent :** |

☞ Les deux systèmes ayant la même énergie cinétique, on a :

**. Ieq . 2 = . Im . 2 + . I2 . 2 + . M3 . 2**

☞ Les deux systèmes ayant les mêmes puissances, on a :

. + . =  P(Ext→S,Rg) +  P(Int→S,Rg)

**. + . = . + . + .**

On a alors une écriture simplifiée du PFD : **Cm  Creq = Ieq .**

Ou du TEC : **Cm.m  Creq.m =**

**☞ L'inertie équivalente se calcule à partir des différentes inerties et des rapports de transmission.**

**☞ Le couple résistant équivalent se calcule à partir des différentes actions (autre que le couple moteur) extérieures et intérieures et des rapports de transmission.**

**☞ En général on a un couple résistant équivalent négatif.**

## 2- Calcul des inerties et moments équivalents

### 2.1- Moment d’inertie équivalent

Posons : ☞ **k = = −**  le rapport de transmission de l’arbre 1 à l’arbre 2

☞ ** = = R2**  le rapport de transmission de l’arbre 2 à la crémaillère 3

L’équation (a) devient :  **. Ieq . 2 = . Im . 2 + . I2 . k2 . 2 + . M3 . 2 . k2 . 2**

D’où le moment d’inertie équivalent sur l’arbre 1 : **Ieq = Im + I2 . k2 + M3 . 2 . k2**

### 2.2- Inertie équivalente ramenée sur un arbre

On définit : ☞ l’inertie équivalente de l’arbre 2 ramenée sur l’arbre 1 : **I2 . k2**

☞ l’inertie équivalente du solide 3 ramenée sur l’arbre 1 : **M3 . 2 . k2**

### 2.3- Couple équivalent

L’équation (b) devient : .  **=**  . k .  **+ .  . k .**

D’où le couple équivalent sur l’arbre 1 : **Creq = C2 . k + F3 . . k**

### 2.4- Couple équivalent ramené sur un arbre

On définit : ☞ le couple équivalent au couple C2 ramené sur l’arbre 1 : **C2 . k**

☞ le couple équivalent à la force F3 ramenée sur l’arbre 1 : **F3 .  . k**

## 3- Transmission avec un rendement 

### 3.1- Systèmes étudié et équivalent Soit la chaîne de transmission de puissance suivante :



**Puissance dissipée (quantité positive) = PE  PS = (1 − ) . PE**

La transmission a un rendement . Par définition ce rendement est le rapport entre les puissances à l'entrée de la transmission et celle à la sortie de la transmission.

**Le rendement s'écrit donc :** ** =**

### 3.2- Application du TEC

☞ Sur le système constitué des organes moteur :

Cm.m.  PE = Ieqm.m.

On en déduit : PE = Cm.m.  Ieqm.m.

☞ Sur le système constitué des organes récepteurs :

 P(Ext→S,Rg) +  P(Int→S,Rg) + .PE = Ieqr.m.

On en déduit :

** P(Ext→S,Rg) +  P(Int→S,Rg) + .Cm.m. = (.Ieqm.+ Ieqr).m.**

|  |  |
| --- | --- |
| 3.3- Modèle équivalent Le modèle équivalent est un arbre dont la vitesse de rotation est celle du moteur : m.  L’inertie Ieq de cet arbre est égale à la somme des inerties des organes en mouvement ramenées sur l’arbre moteur. |  |

Cet arbre est soumis à deux couples :

☞ Un couple moteur équivalent au couple moteur du modèle étudié

☞ Un couple résistant équivalent aux différentes actions (autre que le couple moteur) extérieures et intérieures appliquées sur le système étudié

L'application du TEC à ce système donne : **Cmeq . m + Creq . m = Ieq.m.**

On a alors une écriture simplifiée du PFD : **Cmeq  Creq = Ieq .**

Ou du TEC : **Cmeq.m  Creq.m =**

Les différents paramètres du système équivalent se calculent alors de la manière suivante :

**☞ Couple moteur équivalent : Cmeq = .Cm**

**☞ Moment d'inertie équivalent : Ieq = .Ieqm + Ieqr**

avec Ieqm et Ieqr les inerties équivalentes des organes moteur et récepteur ramenées sur l'arbre moteur.

**☞ Couple résistant équivalent calculé à partir des actions extérieures et intérieures et des rapports de transmission.**

**Remarques :**

☞ En général la puissance du couple résistant équivalent est négative.

☞ Si on a des puissances d'actions extérieures ou intérieures appliquées sur les organes moteur (autre que le couple moteur ) celles-ci sont multipliées par le rendement  :

Creq = .Creqm + Creqr

où : Creqm est le couple résistant équivalent aux actions appliquées sur les organes moteur

et : Creqr est le couple résistant équivalent aux actions appliquées sur les organes récepteur