

Plateau coulissant de chariot : Corrigé

1- Etude cinématique

a- La liaison entre 1 et 0 étant une pivot d'axe (B, $\vec{y}$) on a : $\vec{V}_{B \in 1/0} = \vec{0}$

On en déduit : $\vec{V}_{I \in 1/0} = \vec{V}_{B \in 1/0} + \vec{IB} \wedge \vec{\Omega}_{1/0} = \vec{0} - R_1 \cdot \vec{z} \wedge \omega_1 \cdot \vec{y} = R_1 \cdot \omega_1 \cdot \vec{x}$

Le roulement sans glissement en I entre 1 et R_i donne : $\vec{V}_{I \in R_i/1} = \vec{0} \Rightarrow \vec{V}_{B \in R_i/0} = \vec{V}_{I \in 1/0} = R_1 \cdot \omega_1 \cdot \vec{x}$

La liaison entre R_i et 0 étant une glissière on a : $\vec{V}_{C \in R_i/0} = \vec{V}_{B \in R_i/0} = R_1 \cdot \omega_1 \cdot \vec{x}$

La liaison entre R_i et 2 étant une pivot d'axe (C, $\vec{y}$) on a : $\vec{V}_{C \in 2/0} = \vec{V}_{C \in R_i/0} = R_1 \cdot \omega_1 \cdot \vec{x}$

Enfin le rapport du réducteur étant défini par : $\lambda = \frac{\omega_1(t)}{\omega_m(t)}$ On obtient : $\vec{V}_{C \in 2/0} = R_1 \cdot \lambda \cdot \omega_m \cdot \vec{x}$

b- La chaîne étant fixée en B, on a : $\vec{V}_{D \in 2/0} = \vec{0}$ Avec : $\vec{V}_{C \in 2/0} = \vec{V}_{D \in 2/0} + \vec{CD} \wedge \vec{\Omega}_{2/0}$

Soit : $R_1 \cdot \lambda \cdot \omega_m \cdot \vec{x} = \vec{0} - R_2 \cdot \vec{z} \wedge \omega_2 \cdot \vec{y} = R_2 \cdot \omega_2 \cdot \vec{x} \Rightarrow \omega_2 = \frac{R_1 \cdot \lambda}{R_2} \cdot \omega_m$ Soit : $\vec{\Omega}_{2/0} = \frac{R_1 \cdot \lambda}{R_2} \cdot \omega_m \cdot \vec{y}$

c- La chaîne étant fixée en B, on a : $\vec{V}_{D \in 2/0} = \vec{0}$ Avec : $\vec{V}_{E \in 2/0} = \vec{V}_{D \in 2/0} + \vec{ED} \wedge \vec{\Omega}_{2/0}$

Soit : $\vec{V}_{E \in 2/0} = \vec{0} + -2 \cdot R_2 \cdot \vec{z} \wedge \omega_2 \cdot \vec{y} = 2 \cdot R_2 \cdot \frac{R_1 \cdot \lambda}{R_2} \cdot \omega_m \cdot \vec{x} \Rightarrow \vec{V}_{E \in 2/0} = \vec{V}_{F \in R_s/0} = 2 \cdot R_1 \cdot \lambda \cdot \omega_m \cdot \vec{x}$

2- Etude cinétique

2.1- Puissances des frottements visqueux

Le mouvement de R_i par rapport à 0 est une translation avec : $\vec{V}_{C \in R_i/0} = R_1 \cdot \lambda \cdot \omega_m \cdot \vec{x}$ Donc :

$$\{\mathcal{V}_{R_i/0}\} = \begin{Bmatrix} \vec{0} \\ \vec{V}_{C \in R_i/0} \end{Bmatrix} \text{ Avec : } \vec{V}_{C \in R_i/0} = R_1 \cdot \lambda \cdot \omega_m \cdot \vec{x} \Rightarrow \{\mathcal{V}_{R_i/0}\} = \begin{Bmatrix} 0 & R_1 \cdot \lambda \cdot \omega_m \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix} \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$$

$$\text{Donc : } P(0 \rightarrow R_i/0) = \begin{Bmatrix} \vec{0} \\ \vec{V}_{C \in R_i/0} \end{Bmatrix} \otimes \begin{Bmatrix} \vec{F}_{0 \rightarrow R_i} \\ \mathcal{M}_{C(0 \rightarrow R_i)} \end{Bmatrix} = \vec{F}_{0 \rightarrow R_i} \cdot \vec{x} \cdot \vec{V}_{C \in R_i/0} \cdot \vec{x}$$

D'autre part : $\vec{F}_{0 \rightarrow R_i} \cdot \vec{x} = -b \cdot \vec{V}_{C \in R_i/0} \cdot \vec{x}$ Donc : $P(0 \rightarrow R_i/0) = -b \cdot \vec{V}_{C \in R_i/0}^2$

Soit finalement : $P(0 \rightarrow R_i/0) = -b \cdot (R_1 \cdot \lambda \cdot \omega_m)^2$

Le mouvement de R_s par rapport à R_i est une translation. Donc : $\{\mathcal{V}_{R_s/R_i}\} = \begin{Bmatrix} \vec{0} \\ \vec{V}_{F \in R_s/R_i} \end{Bmatrix}$

D'autre part on a : $\vec{V}_{F \in R_s/R_i} = \vec{V}_{F \in R_s/0} + \vec{V}_{F \in 0/R_i} = \vec{V}_{F \in R_s/0} - \vec{V}_{F \in R_i/0} = 2 \cdot R_1 \cdot \lambda \cdot \omega_m \cdot \vec{x} - \vec{V}_{F \in R_i/0}$

Et comme le mouvement de R_i par rapport à 0 est une translation : $\vec{V}_{F \in R_i/0} = \vec{V}_{C \in R_i/0} = R_1 \cdot \lambda \cdot \omega_m \cdot \vec{x}$

On obtient : $\vec{V}_{F \in R_s/R_i} = 2 \cdot R_1 \cdot \lambda \cdot \omega_m \cdot \vec{x} - R_1 \cdot \lambda \cdot \omega_m \cdot \vec{x} = R_1 \cdot \lambda \cdot \omega_m \cdot \vec{x}$

$$\text{Donc : } \{\mathcal{V}_{R_s/R_i}\} = \begin{Bmatrix} 0 & R_1 \cdot \lambda \cdot \omega_m \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix} \vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \quad \text{Or } P(R_i \rightarrow R_s/R_i) = \begin{Bmatrix} \vec{0} \\ \vec{V}_{F \in R_s/R_i} \end{Bmatrix} \otimes \begin{Bmatrix} \vec{F}_{R_i \rightarrow R_s} \\ \mathcal{M}_{F(R_i \rightarrow R_s)} \end{Bmatrix}$$

D'où $P(R_i \rightarrow R_s/R_i) = \vec{F}_{R_i \rightarrow R_s} \cdot \vec{x} \cdot \vec{V}_{F \in R_s/R_i} \cdot \vec{x}$ D'autre part : $\vec{F}_{R_i \rightarrow R_s} \cdot \vec{x} = -b \cdot \vec{V}_{F \in R_s/R_i} \cdot \vec{x}$

Donc : $P(R_i \rightarrow R_s/R_i) = -b \cdot \vec{V}_{F \in R_s/R_i}^2$ Avec : $\vec{V}_{F \in R_s/R_i} = R_1 \cdot \lambda \cdot \omega_m \cdot \vec{x}$

Soit finalement : $P(R_i \rightarrow R_s/R_i) = -b \cdot (R_1 \cdot \lambda \cdot \omega_m)^2$

2.2- Application du Théorème de l'énergie cinétique

On a le système $\Sigma = \{\text{Rotor, Réducteur, 1, 2, R}_i, \text{R}_s\}$ (Avec deux pignon 2)

Calculons l'énergie cinétique de Σ dans son mouvement par rapport à 0

$$E_C(\Sigma/0) = E_C(\text{rotor}/0) + E_C(\text{Réducteur}/0) + E_C(1/0) + 2.E_C(2/0) + E_C(R_i/0) + E_C(R_s/0)$$

$$E_C(\Sigma/0) = \frac{1}{2}.J_m.\omega_m^2 + \frac{1}{2}.J_r.\omega_m^2 + 0 + 2.\frac{1}{2}.J_{Dz}(2).\omega_2 + \frac{1}{2}.m_i.\overrightarrow{V_{C \in R_i/0}}^2 + \frac{1}{2}.m_s.\overrightarrow{V_{F \in R_s/0}}^2$$

$$E_C(\Sigma/0) = \frac{1}{2}.(J_m + J_r).\omega_m^2 + 2.\frac{1}{2}.J_{Dz}(2).\left(\frac{R_1.\lambda}{R_2}\right)^2.\omega_m^2 + \frac{1}{2}.m_i.(R_1.\lambda.\omega_m)^2 + \frac{1}{2}.m_s.(2.R_1.\lambda.\omega_m)^2$$

D'autre part du théorème de Huygens on a : $J_{Dz}(2) = J_2 + m_2.\overline{DC}^2 = J_2 + m_2.R_2^2$

Donc : $E_C(\Sigma/0) = \frac{1}{2}.(J_m + J_r).\omega_m^2 + \frac{1}{2}.2.(J_2 + m_2.R_2^2).\left(\frac{R_1.\lambda}{R_2}\right)^2.\omega_m^2 + \frac{1}{2}.(m_i + 4.m_s).(R_1.\lambda.\omega_m)^2$

Soit : $E_C(\Sigma/0) = \frac{1}{2}.J_{eq}.\omega_m^2$ Avec : $J_{eq} = J_m + J_r + 2.J_2.\left(\frac{R_1.\lambda}{R_2}\right)^2 + (m_i + 2.m_2 + 4.m_s).(R_1.\lambda)^2$

Calculons les puissances de Σ dans son mouvement par rapport à 0

Les actions extérieures s'appliquant sur Σ sont :

- ☞ L'action de la pesanteur sur $\{\text{Rotor, Réducteur, 1, 2, R}_i, \text{R}_s\}$ (Avec deux pignon 2)
- ☞ L'action de 0 sur R_i due à la liaison glissière avec frottements visqueux
- ☞ L'action du couple moteur sur le rotor du moteur

Si on considère que les centres de gravité de chacune des pièces en rotation sont sur leur axe de rotation on a alors : $P(\text{pes} \rightarrow \text{Rotor}/0) = P(\text{pes} \rightarrow \text{Réducteur}/0) = P(\text{pes} \rightarrow 1/0) = 0$

D'autre part on a pour les pièces en translation :

$$P(\text{pes} \rightarrow 2/0) = m_2.\overrightarrow{g}.\overrightarrow{V_{C \in 2/0}} = -m_2.g.(\cos \alpha.\overrightarrow{z} + \sin \alpha.\overrightarrow{x}).R_1.\lambda.\omega_m.\overrightarrow{x} = -m_2.g.\sin \alpha.R_1.\lambda.\omega_m$$

$$P(\text{pes} \rightarrow R_i/0) = m_i.\overrightarrow{g}.\overrightarrow{V_{C \in R_i/0}} = -m_i.g.(\cos \alpha.\overrightarrow{z} + \sin \alpha.\overrightarrow{x}).R_1.\lambda.\omega_m.\overrightarrow{x} = -m_i.g.\sin \alpha.R_1.\lambda.\omega_m$$

$$P(\text{pes} \rightarrow R_s/0) = m_s.\overrightarrow{g}.\overrightarrow{V_{F \in R_s/0}} = -m_s.g.(\cos \alpha.\overrightarrow{z} + \sin \alpha.\overrightarrow{x}).2.R_1.\lambda.\omega_m.\overrightarrow{x} = -2.m_s.g.\sin \alpha.R_1.\lambda.\omega_m$$

On a vu précédemment que : $P(0 \rightarrow R_i/0) = -b.(R_1.\lambda.\omega_m)^2$

Enfin la puissance du couple moteur est : $P(\overrightarrow{C_m} \rightarrow \text{Rotor}/0) = C_m.\omega_m$

On a donc la somme des puissances des actions extérieures :

$$\Sigma P(\text{Ext} \rightarrow \Sigma/0) = 2 \times P(\text{pes} \rightarrow 2/0) + P(\text{pes} \rightarrow R_i/0) + P(\text{pes} \rightarrow R_s/0) + P(0 \rightarrow R_i/0) + P(\overrightarrow{C_m} \rightarrow \text{Rotor}/0)$$

$$\Sigma P(\text{Ext} \rightarrow \Sigma/0) = -g.\sin \alpha.R_1.\lambda.(2.m_2 + m_i + 2.m_s).\omega_m - b.(R_1.\lambda)^2.\omega_m^2 + C_m.\omega_m$$

Enfin toutes les liaisons intérieure sont parfaites sauf celle entre R_s et R_i on a donc :

$$\Sigma P(\text{Int} \rightarrow \Sigma/0) = P(R_i \rightarrow R_s/R_i) = -b.(R_1.\lambda.\omega_m)^2$$

Appliquons le TEC à Σ :

$$\frac{d E_C(\Sigma/0)}{dt} = \Sigma P(\text{Ext} \rightarrow \Sigma/0) + \Sigma P(\text{Int} \rightarrow \Sigma/0)$$

$$J_{eq}.\omega_m.\dot{\omega}_m = C_m.\omega_m - g.\sin \alpha.R_1.\lambda.(2.m_2 + m_i + 2.m_s).\omega_m - 2.b.(R_1.\lambda)^2.\omega_m^2$$

$$J_{eq}.\dot{\omega}_m = C_m - g.\sin \alpha.R_1.\lambda.(2.m_2 + m_i + 2.m_s) - 2.b.(R_1.\lambda)^2.\omega_m$$

Qui s'écrit donc : $C_m - (\gamma + \beta.\omega_m) = J_{eq}.\dot{\omega}_m$ Avec :

$$J_{eq} = J_m + J_r + 2.J_2.\left(\frac{R_1.\lambda}{R_2}\right)^2 + (m_i + 2.m_2 + 4.m_s).(R_1.\lambda)^2$$

$$\gamma = g.\sin \alpha.R_1.\lambda.(2.m_2 + m_i + 2.m_s)$$

$$\beta = 2.b.(R_1.\lambda)^2$$

2.3- Constructio du schéma bloc

L'équation précédente peut également s'écrire : $c_m(t) - \gamma(t) = J_{eq} \cdot \frac{d \omega_m(t)}{dt} + \beta \cdot \omega_m(t)$ Soit

Dans le domaine de Laplace : $C_m(p) - \Gamma(p) = (\beta + J_{eq} \cdot p) \cdot \Omega_m(p)$

$$\Leftrightarrow \Omega_m(p) = \frac{1}{\beta + J_{eq} \cdot p} \cdot (C_m(p) - \Gamma(p))$$

Ainsi que l'équation : $u(t) = R \cdot i(t) + L \cdot \frac{d i(t)}{dt} + e(t)$ Qui s'écrit dans le domaine de Laplace :

$$U(p) = R \cdot I(p) + L \cdot p \cdot I(p) + E(p) \quad \Leftrightarrow \quad I(p) = \frac{1}{R + L \cdot p} \cdot (U(p) - E(p))$$

Enfin on a les équations : $E(p) = K_V \cdot \Omega_m(p)$ et : $C_m(p) = K_C \cdot I(p)$

Ces équations et la description de la structure de l'asservissement permet d'obtenir le schéma bloc :

