

**MP 2025-2026****DS N°2 – Canne robotisée****Corrigé****Partie I- Présentation du prototype de canne robotisée étudié****Question 1**

Pour un cycle de marche normale, il y a bien une symétrie des appuis sur les jambes droite et gauche. Aussi bien en ce qui concerne la durée et l'intensité des efforts normaux.

Pour un cycle de marche perturbée, l'appui sur la jambe saine (jambe droite) est prolongé d'environ 10% du cycle, ce qui augmente la durée du double appui avant le balancement de la jambe saine.

Cette augmentation du double appui permet une augmentation plus progressive de l'appui sur la jambe immobilisée à 20°. D'autre part la valeur moyenne de l'effort sur la jambe immobilisée est peu réduite mais elle est plus constante : une variation d'environ 0,05 contre 0,4 pour la marche normale.

**Question 2**

Pour un cycle de marche assistée, l'effort normal sur la jambe immobilisée à 20° est diminué d'environ 0,2 à 0,3. Cela est compensé par l'effort normal sur la canne qui est d'environ 0,2 sur la phase d'appui de la jambe immobilisée à 20°.

On lit sur la figure 7, une valeur maximale de l'effort normal sur la canne de 0,25. Cela est une valeur normalisée. D'où la valeur maximale de l'effort normal sur la canne :  **$0,25 \times 9,81 \times 71,4 = 175 \text{ N}$** .

**Partie III- Etude de l'architecture du système vis-écrou de l'axe linéaire****Question 3**

Les éléments roulants (douille à billes et vis-écrou à billes) permettent de limiter les frottements dans les liaisons, tout en gardant une bonne rigidité dans ces liaisons avec des jeux faibles. Les exigences qui justifient l'utilisation de ces éléments roulants sont donc :

- ☞ Id 8 : « Système réversible »
- ☞ Id 3.1.6.2.1 : « Rigidité élevée, pas de jeu radial et faible résistance au déplacement »
- ☞ Id 4 : « Le système doit limiter son impact environnemental » : Consommation énergétique, bruit.

**Question 4**

Notons  $\{\mathcal{V}_{eq}(2/3)\}$  le torseur cinématique de la liaison à ces deux liaisons en parallèle. On a :

$$\{\mathcal{V}_{eq}(2/3)\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ \omega_{O_3}^y & V_{O_3}^y \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{O_3} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ \omega_{O'_3}^y & V_{O'_3}^y \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{O'_3} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ \omega_{O_3}^y & V_{O_3}^y \\ 0 & 2.a.\omega_{O_3}^y \end{Bmatrix}_{O_3}$$

On obtient donc : ☞ Par l'équation de la résultante sur  $\overrightarrow{y_2}$  :  $\omega_{O_3}^y = \omega_{O'_3}^y$

☞ Par l'équation des moments en  $O_3$  sur  $\overrightarrow{y_2}$  :  $V_{O_3}^y = V_{O'_3}^y$

☞ Par l'équation des moments en  $O_3$  sur  $\overrightarrow{z_2}$  :  $\omega_{O_3}^y = 0$

D'où la torseur cinématique de la liaison équivalent :  $\{\mathcal{V}_{eq}(2/3)\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & V_{O_3}^y \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{O_3} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & V_{O_3}^y \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{O_4}$

**La liaison équivalente à ces deux liaisons pivot glissant est donc une glissière de direction  $\overrightarrow{y_2}$ .**

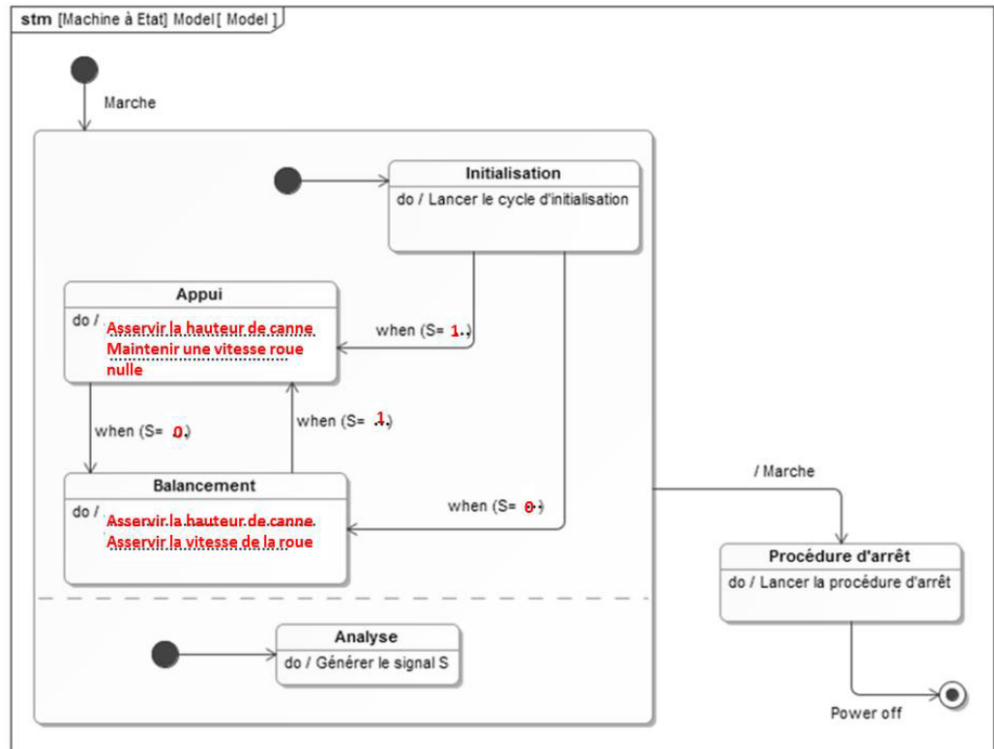
## Partie IV- Etude de l'exigence Id 3.1.6 « Commande des axes asservis »

### Question 5

On a par la relation de Chasles :  $\overrightarrow{IH} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AH} \Rightarrow h_0 \cdot \overrightarrow{y_0} + \overrightarrow{IH} \cdot \overrightarrow{x_0} \cdot \overrightarrow{x_0} = R \cdot \overrightarrow{y_0} + \ell(t) \cdot \overrightarrow{y_2}$   
 Soit en projection sur  $\overrightarrow{y_0}$  :  $h_0 = R + \ell(t) \cdot \overrightarrow{y_2} \cdot \overrightarrow{y_0}$  or :  $\overrightarrow{y_2} \cdot \overrightarrow{y_0} = \cos \theta(t)$

On obtient donc :  $h_0 = R + \ell(t) \cdot \cos \theta(t)$  Ou :  $\ell(t) = \frac{h_0 - R}{\cos \theta(t)}$

### Question 6



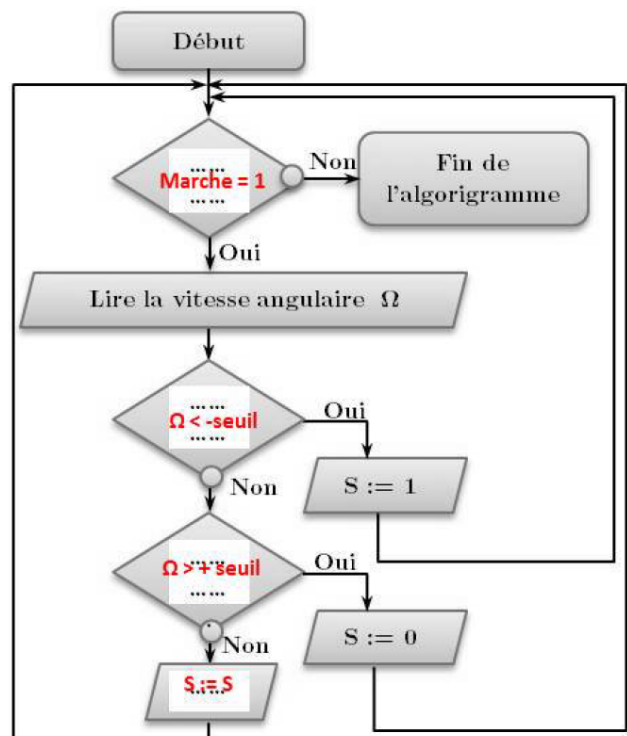
### Question 7

La figure 12 montre une valeur absolue maximale pour  $\Omega$  de :  $130 \text{ rad.s}^{-1}$ .

D'où le seuil sera tel que :

$$\text{Seuil} = 130 \cdot \frac{1}{100} = 1,3$$

### Question 8



## Partie V – Modélisation et analyse de la commande lors de la phase de d'appui

### 5.1- Elaboration du modèle de connaissance de la partie dynamique de l'axe linéaire

#### Question 9

L'énergie cinétique de l'ensemble en mouvement (Rotor + Vis + Canne supérieure) est :

$$E_C(S/0) = \frac{1}{2} J_{\text{rotor}} \cdot \omega_m^2 + \frac{1}{2} J_{\text{vis}} \cdot \omega_m^2 + \frac{1}{2} M_3 \cdot V_m^2 \quad \text{avec : } V_m = \frac{\text{pas}}{2\pi} \cdot \omega_m$$

$$\text{Donc : } E_C(S/0) = \frac{1}{2} \left[ J_{\text{rotor}} + J_{\text{vis}} + M_3 \cdot \left( \frac{\text{pas}}{2\pi} \right)^2 \right] \cdot \omega_m^2 = \frac{1}{2} J_{\text{eq}} \cdot \omega_m^2$$

$$\text{Avec : } J_{\text{eq}} = J_{\text{rotor}} + J_{\text{vis}} + M_3 \cdot \left( \frac{\text{pas}}{2\pi} \right)^2 = 2,19 \cdot 10^{-6} + 2,52 \cdot 10^{-6} + 1,5 \times \left( \frac{3 \cdot 10^{-3}}{2\pi} \right)^2 = 5,05 \cdot 10^{-6} \text{ kg.m}^2$$

#### Question 10

Les actions extérieures s'appliquant sur S sont :

☞ Le couple moteur  $C_m$  :  $P(\text{moteur} \rightarrow 4/2) = C_m \cdot \omega_m$ .

☞ L'action du patient :  $P(\text{patient} \rightarrow 3/2) = \vec{F}_P \cdot \vec{V}_m \cdot \vec{y}_2 = -F_P \cdot \vec{y}_2 \cdot \frac{\text{pas}}{2\pi} \cdot \omega_m \cdot \vec{y}_2 = -F_P \cdot \frac{\text{pas}}{2\pi} \cdot \omega_m$

☞ Les actions de 2 sur 3 et 4 dues aux liaisons parfaites :  $P(2 \rightarrow 4/2) = P(2 \rightarrow 3/2) = 0$

☞ L'action de pesanteur (**négligeable**) :  $P(\text{pes} \rightarrow 3/2) = -M_3 \cdot g \cdot \vec{y}_0 \cdot \frac{\text{pas}}{2\pi} \cdot \omega_m \cdot \vec{y}_2 = -M_3 \cdot g \cdot \cos \theta \cdot \frac{\text{pas}}{2\pi} \cdot \omega_m$

D'où la somme des puissances extérieures :  $\Sigma P(\text{Ext} \rightarrow S/2) = C_m \cdot \omega_m - (F_P + M \cdot g \cdot \cos \theta) \cdot \frac{\text{pas}}{2\pi} \cdot \omega_m$

#### Question 11

L'ensemble des effets des frottements visqueux ramené sur l'arbre moteur est un coefficient f.

D'où la somme des puissances des actions intérieures :  $\Sigma P(\text{Int} \rightarrow S/2) = -f \cdot \omega_m^2$

#### Question 12

L'application du théorème de l'énergie cinétique :  $\Sigma P(\text{Ext} \rightarrow S/2) + \Sigma P(\text{Int} \rightarrow S/2) = \frac{d E_C(S/2)}{dt}$

Donne en négligeant le poids de 3 :  $C_m(t) \cdot \omega_m(t) - F_P(t) \cdot \frac{\text{pas}}{2\pi} \cdot \omega_m(t) - f \cdot (\omega_m(t))^2 = J_{\text{eq}} \cdot \omega_m(t) \cdot \frac{d \omega_m(t)}{dt}$

D'où l'équation différentielle du mouvement :  $C_m(t) - F_P(t) \cdot \frac{\text{pas}}{2\pi} - f \cdot \omega_m(t) = J_{\text{eq}} \cdot \frac{d \omega_m(t)}{dt}$

### 5.2- Modélisation de la chaîne d'énergie de l'axe linéaire

#### Question 13

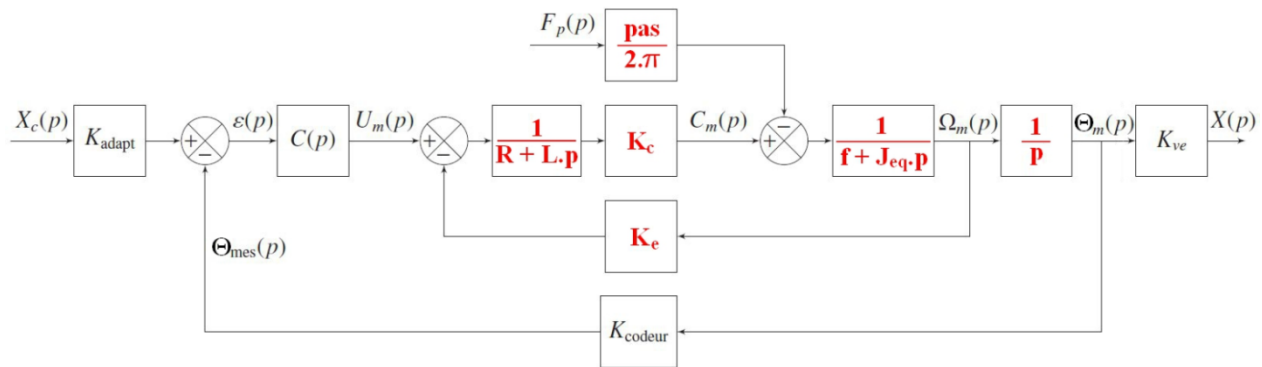
Les conditions initiales étant nulles la transformée de Laplace de cette équation donne :

$$C_m(p) - F_P(p) \cdot \frac{\text{pas}}{2\pi} - f \cdot \Omega_m(p) = J_{\text{eq}} \cdot p \cdot \Omega_m(p) \quad \text{Soit : } \Omega_m(p) = \frac{1}{f + J_{\text{eq}}} \cdot \left[ C_m(p) - F_P(p) \cdot \frac{\text{pas}}{2\pi} \right]$$

$$U_m(p) = E(p) + R \cdot I_m(p) + L \cdot p \cdot I_m(p) \quad \text{Soit : } I_m(p) = \frac{1}{R + L \cdot p} \cdot (U_m(p) - E(p))$$

$$\text{Enfin on a : } C_m(p) = K_c \cdot I_m(p) \quad \text{Et : } E(p) = K_e \cdot \Omega_m(p)$$

Ces égalités permettent de compléter le schéma bloc du moteur ci-dessous :



### Question 14

De ce schéma bloc on en déduit : 
$$H_m(p) = \left( \frac{\Omega_m(p)}{U_m(p)} \right)_{F_p(p)=0} = \frac{\frac{K_c}{(R + L.p).(f + J_{eq}.p)}}{1 + \frac{K_e.K_c}{(R + L.p).(f + J_{eq}.p)}}$$

On en déduit après mise sous une forme canonique :

$$H_m(p) = \frac{\frac{K_c}{K_e.K_e + R.f}}{1 + \frac{R.J_{eq} + L.f}{K_e.K_e + R.f} \cdot p + \frac{L.J_{eq}}{K_e.K_e + R.f} p^2}$$

### Question 15

A partir des valeurs numériques prise sur le diagramme ibd du document 2 on en déduit :

$$K_{ve} = \frac{\text{pas}}{2.\pi} = \frac{3.10^{-3}}{2.\pi} = 4,77.10^{-4} \text{ m.rad}^{-1}$$

et :

$$K_{codeur} = \frac{500}{2.\pi} = 79,6 \text{ inc.rad}^{-1}$$

### Question 16

Sachant que  $\varepsilon(p) = 0$  pour  $X(p) = X_c(p)$  on en déduit :

$$K_{adapt} = \frac{K_{codeur}}{K_{ve}} = \frac{500}{3.10^{-3}} = 1,67.10^5 \text{ inc.m}^{-1}$$

## 5.3- Modèle comportemental

### Question 17

La tangente à l'origine est horizontale et il n'y a pas de dépassement de la valeur finale. Donc la fonction de transfert est de la forme :

$$\frac{K_m}{(1 + T_1.p).(1 + T_2.p)}$$

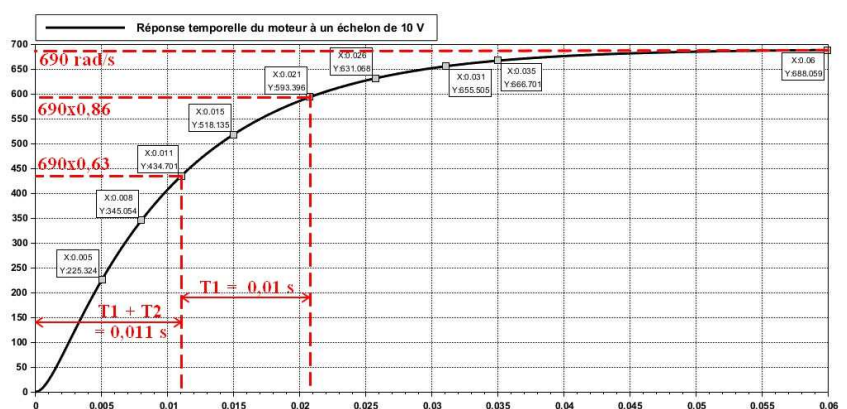
La valeur finale  $S_\infty$  à un échelon de tension de  $U_0 = 10 \text{ V}$  est de  $690 \text{ rad.s}^{-1}$ . D'où le gain statique :

$$K_m = \frac{S_\infty}{U_0} = \frac{360}{10} = 69 \text{ rad.s}^{-1}.\text{V}^{-1}$$

Les 63% et 86 % de la valeur finale sont respectivement atteintes aux dates  $T_1 + T_2 = 11 \text{ ms}$  et  $2.T_1 + T_2 = 21 \text{ ms}$ . D'où  $T_1 = 10 \text{ ms}$  et  $T_2 = 1 \text{ ms}$ . D'où les fonctions de transfert du moteur et de la FTBO

$$H_m(p) = \frac{69}{(1 + 0,01.p).(1 + 10^{-3}.p)}$$

$$H_{BO1}(p) = \frac{H_m(p).K_{codeur}}{p} = \frac{5490}{p.(1 + 0,01.p).(1 + 10^{-3}.p)} \text{ inc.V}^{-1}$$



## 5.4- Correction proportionnelle

### Question 18

La FTBO correspondant au schéma bloc de la figure 14 s'écrit :  $H_{BO}(p) = \frac{K_{Cor} \cdot K_{BONC}}{p}$ .

On en déduit la FTBF :  $H_{BF}(p) = \frac{\frac{K_{Cor} \cdot K_{BONC}}{p}}{1 + \frac{K_{Cor} \cdot K_{BONC}}{p}} = \frac{K_{Cor} \cdot K_{BONC}}{p + K_{Cor} \cdot K_{BONC}}$  Soit :  $H_{BF}(p) = \frac{1}{1 + \frac{p}{K_{Cor} \cdot K_{BONC}}}$

Donc la FTBF est un premier ordre de : ☞ Gain statique unitaire :  $K_{BF} = 1$

☞ Constante de temps :  $\tau = \frac{1}{K_{Cor} \cdot K_{BONC}}$

La FTBF étant un premier ordre de gain statique unitaire et de constante de temps  $\tau = \frac{1}{K_{Cor} \cdot K_{BONC}}$  la réponse de l'asservissement à un échelon de consigne se fait avec **une erreur nulle sans dépassement de la valeur finale et avec un temps de réponse de  $t_{5\%} = 3 \cdot \tau = \frac{3}{K_{Cor} \cdot K_{BONC}}$**

### Question 19

L'Id 3.1.6.2 impose un temps de réponse maximal de 60 ms. Donc pour répondre à ce critère de rapidité il faut un gain  $K_{Cor}$  tel que :  $\frac{3}{K_{Cor} \cdot K_{BONC}} \leq 0,06$  soit :  $K_{Cor} \geq \frac{3}{0,06 \cdot K_{BONC}}$

Avec  $K_{BONC} = 5\,500$ , pour répondre au critère de rapidité il faut donc que :  $K_{Cor} \geq 9,1 \cdot 10^{-3} \text{ V.inc}^{-1}$

### Question 20

**L'évolution de la réponse temporelle n'est pas cohérente avec le modèle retenu (1<sup>er</sup> ordre) car il y a un dépassement de la valeur finale.**

Cela est dû au fait qu'avec des gains  $K_{Cor} = 9,1 \cdot 10^{-3} \text{ V.inc}^{-1}$  et  $K_{BONC} = 5\,500 \text{ inc.V}^{-1}$  la FTBO modélisée par un intégrateur s'écrit :  $\frac{K_{Cor} \cdot K_{BONC}}{p} = \frac{50}{p}$  dont la pulsation de coupure à 0 dB est de  $50 \text{ rad.s}^{-1}$ . Et qu'à cette pulsation les termes  $\frac{1}{1 + T_1 \cdot p}$  et  $\frac{1}{1 + T_2 \cdot p}$  de la FTBO  $H_{BO1}(p)$  ne sont plus négligeables. Et donc que la FTBO ne peut plus être considéré comme un intégrateur pur.

**Il faut donc modéliser la FTBO non corrigée par :**  $\frac{K_{BONC}}{p \cdot (1 + T_1 \cdot p)}$  **ou :**  $\frac{K_{BONC}}{p \cdot (1 + T_1 \cdot p) \cdot (1 + T_2 \cdot p)}$

### Question 21

Avec cette FTBO on a :  $H_{BF}(p) = \frac{\frac{K_{Cor} \cdot K_{BONC}}{p \cdot (1 + T_1 \cdot p)}}{1 + \frac{K_{Cor} \cdot K_{BONC}}{p \cdot (1 + T_1 \cdot p)}}$  Soit :  $H_{BF}(p) = \frac{1}{1 + \frac{p}{K_{Cor} \cdot K_{BONC}} + \frac{\tau_{BO}}{K_{Cor} \cdot K_{BONC}} \cdot p^2}$

Donc FTBF du 2<sup>nd</sup> ordre : ☞ De gain statique  $K_{BF} = 1$

☞ De pulsation propre  $\omega_0 = \sqrt{\frac{K_{Cor} \cdot K_{BONC}}{\tau_{BO}}}$

☞ De facteur d'amortissement  $\xi = \frac{\omega_0}{2 \cdot K_{Cor} \cdot K_{BONC}} = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{K_{Cor} \cdot K_{BONC} \cdot \tau_{BO}}}$

L'asservissement est donc précis quelque soit la valeur de  $K_{Cor}$  car le gain statique de  $H_{BF}(p)$  est unitaire.

En revanche pour vérifier le critère d'amortissement (dépassement inférieur ou égal à 5%) il faut un facteur d'amortissement supérieur à 0,69 :  $\xi \geq 0,69 \Leftrightarrow \frac{1}{2 \cdot \sqrt{K_{\text{Cor}} \cdot K_{\text{BONC}} \cdot \tau_{\text{BO}}}} \geq 0,69$

On en déduit :  $K_{\text{Cor}} \leq K_{\text{Cor}}^{\text{Max}} = \frac{1}{4 \times 0,69^2 \cdot K_{\text{BONC}} \cdot \tau_{\text{BO}}} = \frac{1}{4 \times 0,69^2 \times 55}$  Soit :  $K_{\text{Cor}}^{\text{Max}} = 9,5 \cdot 10^{-3} \text{ V.inc}^{-1}$

### Question 22

Avec  $K_{\text{Cor}} = 9,5 \cdot 10^{-3}$  on a  $\xi = 0,69$  et  $\omega_0 = \sqrt{\frac{9,5 \cdot 10^{-3} \times 5\,500}{0,01}} = 72,3 \text{ rad.s}^{-1}$ .

D'autre part pour  $\xi = 0,69$  le document 6 donne :  $t_{5\%} \cdot \omega_0 = 2,9$ . Soit :  $t_{5\%} = \frac{2,9}{72,3} = 0,040 \text{ s} = 40 \text{ ms}$

Ce correcteur permet donc de vérifier les exigences de dépassement et de rapidité du cahier des charges.

### Question 23

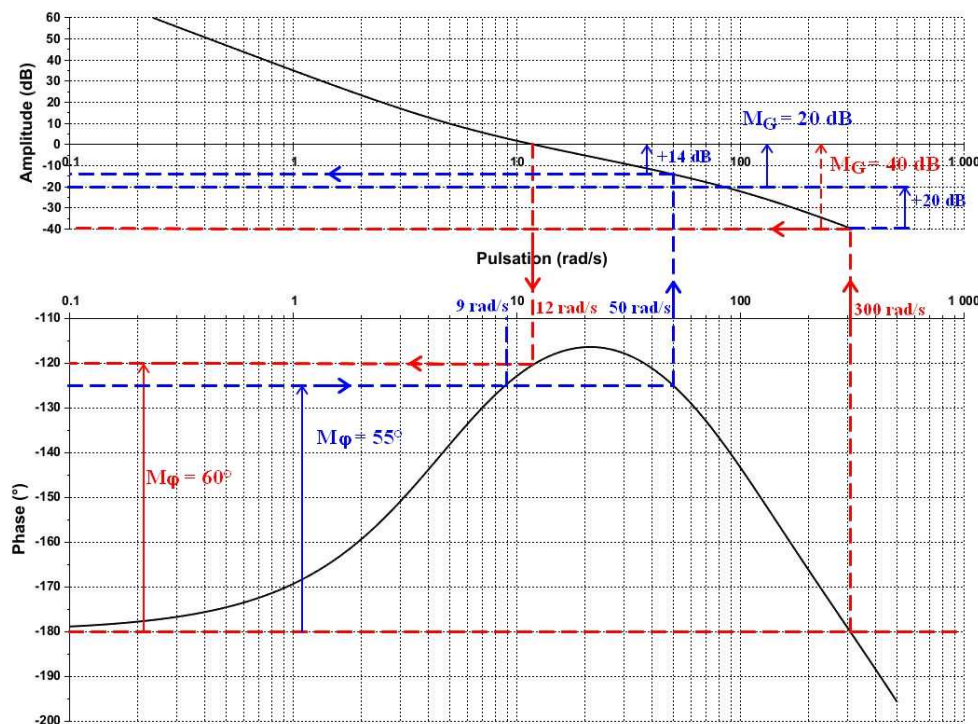
Avec la perturbation, l'asservissement n'est plus précis (car l'intégrateur de la FTBO est placé en aval de la perturbation : voir schéma bloc du document réponse DR3). L'erreur est minimale pour  $K_{\text{Cor}} = K_{\text{Cor}}^{\text{Max}}$ .

On lit alors sur la figure 18 une erreur indicielle de :  $\varepsilon_s = \frac{0,01 - 0,0083}{0,01} = 0,17 = 17 \%$

Or d'après le diagramme des exigences (Id Id 3.1.6.2) on doit avoir  $\varepsilon_s \leq 5\%$ . Donc on ne peut pas, avec un correcteur proportionnel, vérifier simultanément les exigences de dépassement, de rapidité et de précision avec la perturbation.

## 5.5- Correction avec action proportionnelle et intégrale – correcteur PI

### Question 24 Voir tracé en rouge ci-dessous



#### Marge de phase.

Par lecture :  $\omega_{0\text{dB}} \approx 12 \text{ rad.s}^{-1}$   $\varphi(\omega_{0\text{dB}}) = -120^\circ$   $M_\phi = 180^\circ - 120^\circ$   **$M_\phi = 60^\circ$**

#### Marge de gain

Par lecture :  $\omega_{-180^\circ} \approx 300 \text{ rad.s}^{-1}$   $G_{\text{dB}}(\omega_{-180^\circ}) = -40 \text{ dB}$   $M_G = -G_{\text{dB}}(\omega_{-180^\circ})$   **$M_G = 40 \text{ dB}$**

**Question 25** Voir tracé en bleu ci-dessus

Pour respecter la marge de phase il faut une phase à  $\omega_{0dB}$  supérieure à  $55 - 135^\circ = -125^\circ$ . Par lecture sur le diagramme de phase on en déduit qu'il faut  $\omega_{0dB} \in [9;50] \text{ rad.s}^{-1}$ . On retient la pulsation de  $\omega_{0dB} = 50 \text{ rad.s}^{-1}$  pour maximiser la bande passante.

On a à cette pulsation pour  $K_{Cor} = 0,01$  le gain dynamique de la FTBO de  $-14 \text{ dB}$ . Donc pour avoir  $\omega_{0dB} = 50 \text{ rad.s}^{-1}$  il faut :  $K_{Cor} = 0,01 \times 10^{(+14/20)} = 5.10^{-2} \text{ V.inc}^{-1}.\text{s}^{-1}$ .

Le gain  $K_{Cor}$  est sans influence sur la phase donc  $\forall K_{Cor}$  on a  $\omega_{-180^\circ} = 300 \text{ rad.s}^{-1}$ . Pour  $K_{Cor} = 0,01$  le gain dynamique de la FTBO est de  $-40 \text{ dB}$ . Or pour avoir une marge de gain de  $20 \text{ dB}$ , il faut que le gain à cette pulsation soit de  $-20 \text{ dB}$ . Donc la courbe de gain peut être translatée de  $-20 + 20 = 20 \text{ dB}$ . Donc pour avoir une marge de gain de  $20 \text{ dB}$  il faut :  $K_{Cor} = 0,01 \times 10^{(20/20)} = 0,1 \text{ V.inc}^{-1}.\text{s}^{-1}$ .

Finalement : ☞ Pour la marge de phase de  $55^\circ$  il faut :  $K_{Corr} \leq 5.10^{-2} \text{ V.inc}^{-1}.\text{s}^{-1}$ .

☞ Pour la marge de gain de  $20 \text{ dB}$  il faut :  $K_{corr} \leq 1.10^{-1} \text{ V.inc}^{-1}.\text{s}^{-1}$ .

Donc pour les exigences de stabilités il faut un gain maximal du correcteur de  $K_{Cor}^{Max} = 5.10^{-2} \text{ V.inc}^{-1}.\text{s}^{-1}$ .

**Question 26**

Avec ce correcteur qui respecte les marges de stabilité le système respecte également :

☞ L'exigence de précision ( $\epsilon_s = 0$  car on a un intégrateur en amont de la perturbation).

☞ L'exigence de rapidité car  $t_{5\%} \approx 43 \text{ ms} \leq 60 \text{ ms}$ .

☞ L'exigence d'amortissement car il y a un dépassement de la valeur finale de  $D\% = \frac{0,0002}{0,01} = 2\% \leq 5\%$

**Donc toutes les exigences du cahier des charges sont respectées.**

## Partie VI - Modélisation et analyse de la commande de la roue lors de la phase de balancement

**Question 27**

Les points A et H appartiennent respectivement à 2 et 3.

$$\text{Donc : } \overrightarrow{V_{H,3/2}} = \left( \frac{d \overrightarrow{AH}}{dt} \right)_{\mathcal{B}_2} = \left( \frac{d \ell(t). \overrightarrow{y_2}}{dt} \right)_{\mathcal{B}_2}$$

$$\text{On en déduit : } \overrightarrow{V_{H,3/2}} = \dot{\ell}(t). \overrightarrow{y_2}$$

**Question 28**

$$\text{Par la relation de Varignon on a : } \overrightarrow{V_{H,2/0}} = \overrightarrow{V_{A,2/0}} + \overrightarrow{HA} \wedge \overrightarrow{\Omega_{2/0}}$$

$$\text{Or A étant le centre de la liaison pivot entre 2 et 1 : } \overrightarrow{V_{A,2/0}} = \overrightarrow{V_{A,1/0}}$$

$$\text{Or par la relation de Varignon on a : } \overrightarrow{V_{A,1/0}} = \overrightarrow{V_{I,1/0}} + \overrightarrow{AI} \wedge \overrightarrow{\Omega_{1/0}}$$

$$\text{D'autre part on a : } \quad \text{☞ Par composition des vitesses : } \overrightarrow{\Omega_{1/0}} = \overrightarrow{\Omega_{1/2}} + \overrightarrow{\Omega_{2/0}}$$

$$\quad \text{☞ Et du fait du roulement sans glissement en I : } \overrightarrow{V_{I,1/0}} = \vec{0}$$

$$\text{Donc on obtient : } \overrightarrow{V_{H,2/0}} = \overrightarrow{HA} \wedge \overrightarrow{\Omega_{2/0}} + \overrightarrow{AI} \wedge \overrightarrow{\Omega_{1/2}} + \overrightarrow{AI} \wedge \overrightarrow{\Omega_{2/0}}$$

$$\overrightarrow{V_{H,2/0}} = -\ell(t). \overrightarrow{y_2} \wedge \dot{\theta}(t). \overrightarrow{z_2} - R. \overrightarrow{y_0} \wedge (-\omega(t)). \overrightarrow{z_0} - R. \overrightarrow{y_0} \wedge \dot{\theta}(t). \overrightarrow{z_0}$$

$$\overrightarrow{V_{H,2/0}} = R[\omega(t) - \dot{\theta}(t)]. \overrightarrow{x_0} - \ell(t). \dot{\theta}(t). \overrightarrow{x_2}$$

**Question 29**

$$\text{Par composition des vitesses on a : } \overrightarrow{V_{H,3/0}} = \overrightarrow{V_{H,3/2}} + \overrightarrow{V_{H,2/0}}$$

$$\text{Soit : } \overrightarrow{V_{H,3/0}} = R[\omega(t) - \dot{\theta}(t)]. \overrightarrow{x_0} - \ell(t). \dot{\theta}(t). \overrightarrow{x_2} + \dot{\ell}(t). \overrightarrow{y_2}$$

**Question 30**

En projetant cette relation sur  $\vec{y}_0$  on obtient :  $\vec{V}_{H,3/0} \cdot \vec{y}_0 = 0 = -\ell(t) \cdot \dot{\theta}(t) \cdot \sin \theta(t) + \dot{\ell}(t) \cdot \cos \theta(t)$

$$\text{Soit : } \dot{\ell}(t) = \ell(t) \cdot \dot{\theta}(t) \cdot \frac{\sin \theta(t)}{\cos \theta(t)}$$

D'autre en projetant sur  $\vec{x}_0$  on a :  $\vec{V}_{H,3/0} \cdot \vec{x}_0 = V = R[\omega(t) - \dot{\theta}(t)] - \ell(t) \cdot \dot{\theta}(t) \cdot \cos \theta(t) - \dot{\ell}(t) \cdot \sin \theta(t)$

Par substitution on obtient :  $V = R[\omega(t) - \dot{\theta}(t)] - \ell(t) \cdot \dot{\theta}(t) \cdot \cos \theta(t) - \ell(t) \cdot \dot{\theta}(t) \cdot \frac{\sin \theta(t)}{\cos \theta(t)} \cdot \sin \theta(t)$

$$V = R[\omega(t) - \dot{\theta}(t)] - \ell(t) \cdot \dot{\theta}(t) \cdot \frac{\cos^2 \theta(t) + \sin^2 \theta(t)}{\cos \theta(t)}$$

$$V = R \cdot \omega(t) - \dot{\theta}(t) \cdot \left[ R + \frac{\ell(t)}{\cos \theta(t)} \right]$$

Et donc finalement : 
$$\omega(t) = \frac{V}{R} + \dot{\theta}(t) \cdot \left[ 1 + \frac{\ell(t)}{R \cdot \cos \theta(t)} \right]$$

**Question 31**

Le rapport de réduction du réducteur est défini par le quotient  $\frac{\omega_{R/2}}{\omega_{mR/2}}$  où  $\omega_{R/2}$  et  $\omega_{mR/2}$  sont respectivement les vitesses de rotation de la roue et de l'arbre moteur par rapport à la canne inférieure 2. Or la fréquence de rotation nominale du moteur est de 3 260 tr/min soit une vitesse de  $\omega_{mR/2} = \frac{2 \cdot \pi \cdot 3\,260}{60} = 341 \text{ rad.s}^{-1}$ .

D'où le rapport du réducteur nécessaire : 
$$r = \frac{\omega_{R/2}}{\omega_{mR/2}} = \frac{11}{341} \approx \frac{1}{30}$$

**Question 32**

Ce réducteur à trains épicycloïdal à une raison : 
$$\lambda = \frac{\omega_{P1/PS}^z}{\omega_{P2/PS}^z} = \frac{\omega_{P1/PS}^z}{\omega_{S/PS}^z} \cdot \frac{\omega_{S/PS}^z}{\omega_{P2/PS}^z} = -\frac{Z_S}{Z_{P1}} \cdot \frac{Z_{P2}}{Z_S} = -\frac{Z_{P2}}{Z_{P1}}$$

**Question 33**

Par composition des vitesses on a : 
$$\lambda = \frac{\omega_{P1/2} - \omega_{PS/2}}{\omega_{P2/2} - \omega_{PS/2}}$$

Or la couronne P2 est encastrée sur la canne inférieure 2. Donc :  $\omega_{P2/2} = 0$

On obtient donc :  $-\lambda \cdot \omega_{PS/2} = \omega_{P1/2} - \omega_{PS/2}$  Soit :  $\omega_{P1/2} = (1 - \lambda) \cdot \omega_{PS/2}$

Or le rapport de transmission est défini par :  $R_1 = \frac{\omega_{PS/2}}{\omega_{P1/PS}}$  Donc :  $R_1 = \frac{1}{1 - \lambda} = \frac{1}{1 + \frac{Z_{P2}}{Z_{P1}}}$

Soit encore : 
$$R_1 = \frac{Z_{P1}}{Z_{P1} + Z_{P2}}$$
 Application numérique : 
$$R_1 = \frac{18}{18 + 82} = 0,18$$

Si n est le nombre d'étages du réducteur alors :  $r = R_1^n$  Donc :  $n = \frac{\ln r}{\ln R_1} = \frac{\ln(1/30)}{\ln 0,18} = 1,98 \approx 2$

**Deux étages sont donc nécessaires pour obtenir le rapport de réduction r souhaité.**



## Partie VII - Étude de l'exigence 3.1.3 « Transmission des efforts du patient »

### Question 34

Si on isole l'ensemble {1,2,3}, les actions mécaniques extérieures sont :

- ☞ L'action du sol 0 sur 1 : Une force  $\vec{F}_{0 \rightarrow 1}$  appliquée en I
- ☞ L'action du patient sur 1 : Une force  $\vec{F}_P$  appliquée en H

**D'après le théorème du système à l'équilibre soumis à deux forces, (TMS en I ou H) on en déduit que ces deux forces ont même support la droite (IH). D'autre part on a :  $\vec{F}_{0 \rightarrow 1} = -\vec{F}_P$**

### Question 35

D'après la loi de Coulomb, l'angle entre  $\vec{F}_{0 \rightarrow 1}$  et  $\vec{j}_0$  est inférieur ou égal à l'angle d'adhérence  $\varphi$ .

**Donc pour maintenir la canne à l'équilibre on doit avoir  $\beta(t) < \varphi$ .**

**Cet équilibre sera maintenu quelque soit l'intensité de  $\vec{F}_P$  car pour maintenir l'équilibre il suffit d'avoir  $\beta(t) < \varphi$  et  $\vec{F}_{0 \rightarrow 1} = -\vec{F}_P$ .**

**Ce type d'équilibre est un arc-boutement.**

### Question 36

On peut écrire :  $\vec{IA} + \vec{AH} + \vec{HI} = \vec{0}$  Soit :  $R \cdot \vec{y}_0 + \ell(t) \cdot \vec{y}_2 - \lambda \cdot \vec{v} = \vec{0}$

Soit en projection :  
 sur  $\vec{x}_0$  :  $-\ell(t) \cdot \sin \theta(t) + \lambda \cdot \sin \beta(t) = 0 \Rightarrow \lambda \cdot \sin \beta(t) = \ell(t) \cdot \sin \theta(t)$   
 sur  $\vec{y}_0$  :  $R + \ell(t) \cdot \cos \theta(t) - \lambda \cdot \cos \beta(t) = 0 \Rightarrow \lambda \cdot \cos \beta(t) = R + \ell(t) \cdot \cos \theta(t)$

On obtient donc par le quotient de ces deux égalités :  **$\tan \beta = \frac{\ell(t) \cdot \sin \theta(t)}{R + \ell(t) \cdot \cos \theta(t)}$**

### Question 37

On relève sur la figure 3 un angle maximal de  $20^\circ$ . On obtient donc :  $\beta = \arctan\left(\frac{h-R}{h} \cdot \tan \theta\right)$

Application numérique :  $h = 101 \text{ cm}$   $R = 5 \text{ cm}$   $\theta = 20^\circ$   $\beta = \arctan\left(\frac{101-5}{101} \cdot \tan 20^\circ\right) = 19^\circ$

D'où le facteur de frottement minimal nécessaire :  **$f_{\min} = \tan \beta = \tan 19^\circ$   $f_{\min} = 0,34$**

**Or pour un sol en béton  $f = 0,4 > f_{\min}$ . Donc le prototype peut-être utilisé sur un sol en béton.**

### Question 38

On isole la roue 1, les actions mécaniques extérieures sont :

- ☞ Action du sol 0 sur la roue 1 : Force  $\vec{F}_{0 \rightarrow 1} = -\vec{F}_P$  Appliquée en I et telle que  $\varphi = \widehat{\vec{y}_0, \vec{v}}$
- ☞ Action de la canne inférieure 2 sur la roue 1 due à la liaison pivot d'axe (A,  $\vec{z}_0$ )
- ☞ Action de la courroie sur la roue :  $\mathcal{M}_{A(\text{Courroie} \rightarrow 1).Z_0} = C_r$  car les deux poulies (motrices et réceptrices) ont le même diamètre primitif :  $D_{pm} = D_{pr}$ .

Le théorème du moment statique par rapport à l'axe (A,  $\vec{z}_0$ ) donne :  $\vec{AI} \wedge (-\vec{F}_P) \cdot \vec{z}_0 + 0 + C_r = 0$

Or :  $\vec{AI} \wedge (-\vec{F}_P) \cdot \vec{z}_0 = -R \cdot \vec{y}_0 \wedge (-\vec{F}_P \cdot \sin \varphi \cdot \vec{x}_0 + \vec{F}_P \cdot \cos \varphi) \cdot \vec{z}_0 = R \cdot F_P \cdot \sin \varphi$

On en déduit :  **$C_r = R \cdot F_P \cdot \sin \varphi$**

Application numérique :  $R = 0,05 \text{ m}$   $F_P = 175 \text{ N}$   $\varphi = \arctan 0,4 = 21,8^\circ$   **$C_r = 3,25 \text{ N.m}$**

**Question 39**

Il s'agit de bloquer le mouvement. Donc si le mouvement a lieu l'énergie va de la roue vers le moteur.

Donc :  $-C_m \cdot \omega_{mR/2} + \eta_{trans} \cdot C_r \cdot \omega_{R/2} = 0$  (et pas :  $-\eta_{trans} \cdot C_m \cdot \omega_{mR/2} + C_r \cdot \omega_{R/2} = 0$ ) soit :  $C_m = \eta_{trans} \cdot C_r \cdot \frac{\omega_{R/2}}{\omega_{mR/2}}$

On obtient donc :

$$C_m = \eta_{trans} \cdot C_r \cdot r$$

Application numérique :

$$C_m = \frac{0,9 \times 5}{30} = 0,15 \text{ N.m}$$

Or le couple nominal du moteur est de  $C_n = 0,279 \text{ N.m}$  (et le couple maximal  $C_{Max} = K_C \cdot I_{Max} = 2,85 \text{ N.m}$ ) ce qui est supérieur au couple pour bloquer le mouvement ( $C_m = 0,15 \text{ N.m}$ ).

**Sachant que  $C_{Max} \geq C_n \geq C_m$  le moteur choisi permet bien le blocage de la roue.**

## Partie VIII - Synthèse

**Question 40**

Le cahier des charges (performance Id 7) impose un écart de hauteur de main de 3 cm pour un cycle de marche. Sans correction, l'écart peut atteindre jusqu'à 4,5 cm, avec correction l'écart est limité à 2,5 cm maxi ce qui vérifie le cdcf.

Avec correction les variations de hauteur de la main sont donc moins importantes au commencement de la phase d'appui. Ceci apporte un confort dans l'utilisation avec le sentiment d'avoir une canne plus rigide (moins d'affaissement) lors de l'appui.

**Question 41**

Le cahier des charges stipule comme performance à atteindre pour l'assistance de la marche (cadre Id 7) :

- ☞ Un écart maximal sur l'angle d'orientation entre la canne et la jambe de  $20^\circ$ ,
- ☞ Le respect de l'exigence de suivi du pied, l'appui au sol de la canne entre l'avant et l'arrière du pied.

Pour les deux allures de marche, l'exigence de suivi de pied est respectée car la courbe de position de la canne reste comprise entre les courbes de position de l'avant du pied et de l'arrière du pied.

Pour ce qui concerne l'exigence sur l'angle d'orientation, pour les deux allures l'exigence est respectée car les écarts restent inférieurs à  $20^\circ$ .

On peut donc conclure que ce réglage permet de satisfaire les performances de synchronisation de la canne avec le cycle locomoteur à différentes allures.