TD : Distribution à calage variable : Corrigé

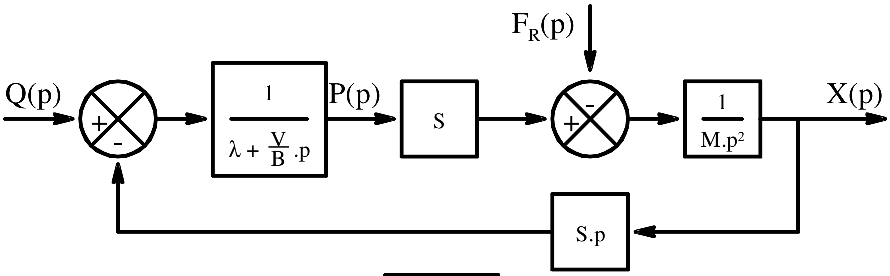
1ière partie : Modélisation du système

1.1- Les transformées de Laplace des équations (a) et (b) donnent :

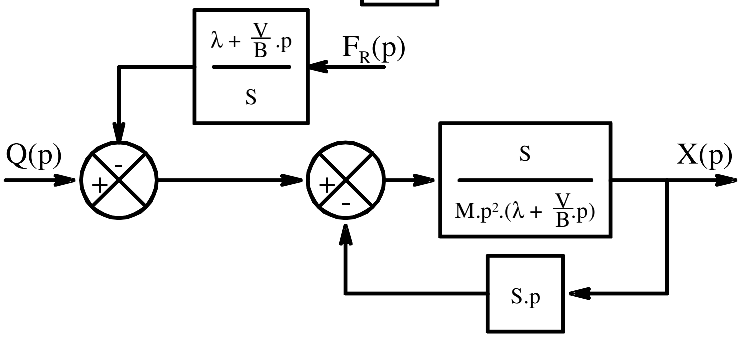
(a) $\Rightarrow$ $\mathbf{S.P(p) - F_R(p) = M.p^2.X(p)}$ $\Rightarrow$ $\mathbf{X(p) = \dfrac{1}{M.p^2}\,.\,\big(S.P(p) - F_R(p)\big)}$

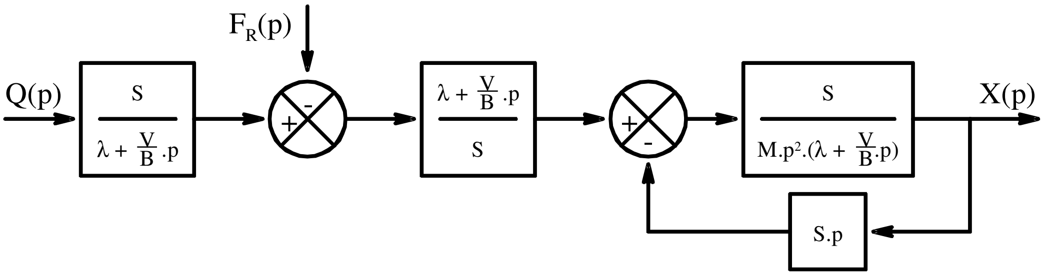
(b) $\Rightarrow$ $\mathbf{Q(p) - \lambda.P(p) = S.p.X(p) + \dfrac{V}{B}.p.P(p)}$ $\Rightarrow$ $\mathbf{P(p) = \dfrac{1}{\lambda + \dfrac{V}{B}.p}\big(Q(p) - S.p.X(p)\big)}$

On en déduit le schéma bloc du vérin :



1.2- Ce schéma bloc est équivalent aux deux schémas bloc suivant :





On en déduit donc : $\mathbf{H_1(p) = \dfrac{\dfrac{S}{\lambda}}{1 + \dfrac{V}{\lambda.B}.p}}$ Et : $H_2(p) = \dfrac{\lambda\left(1 + \dfrac{V}{\lambda.B}.p\right)}{S}\,.\,\dfrac{\dfrac{S}{\lambda.M.p^2 + \dfrac{M.V}{B}.p^3}}{1 + \dfrac{S^2.p}{\lambda.M.p^2 + \dfrac{M.V}{B}.p^3}}$

Soit après calcul : $\mathbf{H_2(p) = \dfrac{\dfrac{\lambda}{S^2}.\left(1 + \dfrac{V}{\lambda.B}.p\right)}{p.\left(1 + \dfrac{\lambda.M}{S^2}.p + \dfrac{M.V}{B.S^2}.p^2\right)}}$

D'où la fonction de transfert du vérin pour $F_R(p) = 0$: $\mathbf{H_1(p).H_1(p) = \dfrac{\dfrac{1}{S}}{p.\left(1 + \dfrac{\lambda.M}{S^2}.p + \dfrac{M.V}{B.S^2}.p^2\right)}}$

1.3- La FTBO est un troisième ordre de classe 1 soit le produit d'un intégrateur et d'un second ordre simple. Lequel second ordre a : ☞ Une pulsation propre : $\omega_0 = S.\sqrt{\dfrac{B}{M.V}}$

et : ☞ Un facteur d'amortissement : $\xi = \dfrac{1}{2}.S.\sqrt{\dfrac{B}{M.V}}.\dfrac{\lambda.M}{S^2} = \dfrac{\lambda}{2.S}.\sqrt{\dfrac{B.M}{V}}$

La résonnance dépend du facteur ξ lequel est fonction du coefficient de débit de fuit λ. Donc en augmentant la valeur de λ on peut diminuer voir supprimer la résonnance.

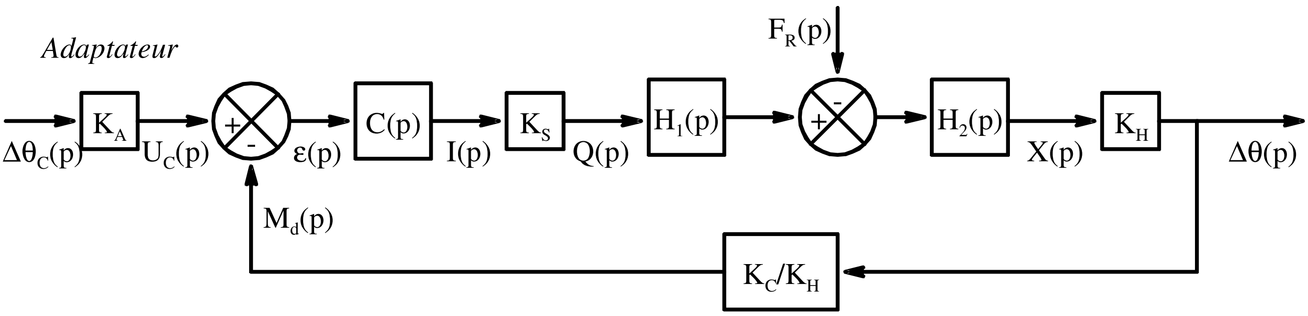
Pour supprimer la résonnance il faut : $\xi \geq \dfrac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \dfrac{\lambda}{2.S}.\sqrt{\dfrac{B.M}{V}} \geq \dfrac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \boldsymbol{\lambda \geq S.\sqrt{\dfrac{2.V}{B.M}}}$

A.N. : $\boldsymbol{\lambda \geq 9{,}4.10^{-4}.\sqrt{\dfrac{2 \times 48.10^{-6}}{1{,}5.10^{9}. \times 0{,}5}} = 3{,}1.10^{-10}\ m^3.s^{-1}.Pa^{-1} = 0{,}031\ l.s^{-1}.b^{-1}}$

1.4- Avec un coefficient de débit de fuite de $\lambda = 5.10^{-10}\ m^3.s^{-1}.Pa^{-1}$. on obtient :

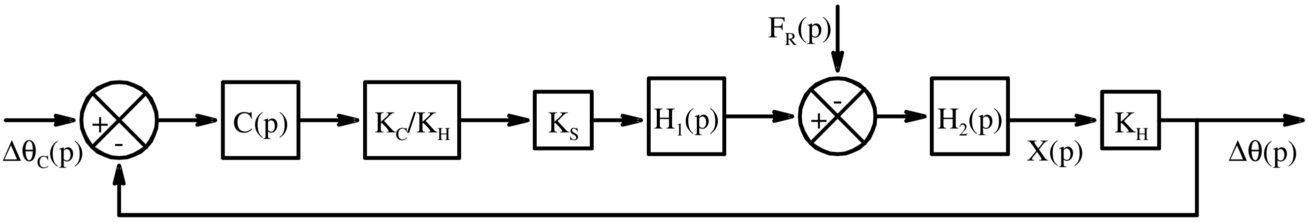
$\boldsymbol{\xi = \dfrac{5.10^{-10}}{2 \times 9{,}4.10^{-4}}.\sqrt{\dfrac{1{,}5.10^{9} \times 0{,}5}{48.10^{-6}}} = 1{,}03}$ et : $\boldsymbol{\omega_0 = 9{,}4.10^{-4}.\sqrt{\dfrac{1{,}5.10^{9}}{0{,}5 \times 48.10^{-6}}} = 7\ 600\ rad.s^{-1}}$

1.5- Le schéma bloc simplifié est équivalent au schéma bloc suivant :

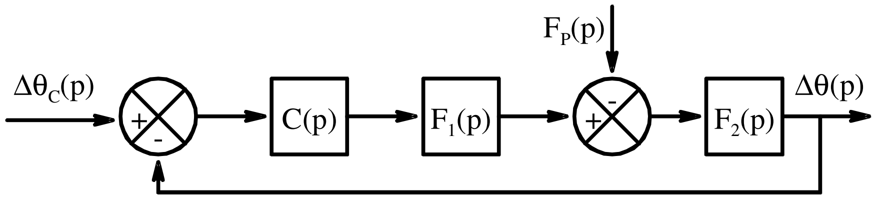


Pour avoir un fonctionnement normal ($\varepsilon(p) = 0$ pour $\Delta\theta(p) = \Delta\theta_C(p)$) il faut donc : $\boldsymbol{K_A = \dfrac{K_C}{K_H}}$

On obtient donc le schéma bloc à retour unitaire :



Soit encore :



Avec : $F_1(p) = \dfrac{K_C.K_S}{K_H}.H_1(p) \Rightarrow \boldsymbol{F_1(p) = \dfrac{\dfrac{S.K_C.K_S}{K_H.\lambda}}{1 + \dfrac{V}{\lambda.B}.p}}$

Et : $F_2(p) = H_2(p).K_H \Rightarrow \boldsymbol{F_2(p) = \dfrac{\dfrac{\lambda.K_H}{S^2}.\left(1 + \dfrac{V}{\lambda.B}.p\right)}{p.\left(1 + \dfrac{\lambda.M}{S^2}.p + \dfrac{M.V}{B.S^2}.p^2\right)}}$

2ième partie : Choix et dimensionnement d'un correcteur

2.1- Etant donné les fonctions $F_1(p)$ et $F_2(p)$ (Avec les applications numérique on a la FTBO non corrigée : $\mathbf{H_{BONC}(p) = F_1(p).F_2(p) = \dfrac{66,8}{p.(1 + 2,71.10^{-4}.p + 1,73.10^{-8}.p^2)}}$

Fonction de transfert produit d'un intégrateur et d'un deuxième ordre avec un gain statique : $\mathbf{K_{BONC} = 66,7\ V.A^{-1}}$, Une pulsation propre $\mathbf{\omega_0 = 7\,600\ rad.s^{-1}}$, et un facteur d'amortissement $\mathbf{\xi = 1,03}$.

On en déduit le tracé des diagrammes de Bode asymptotiques sur la page 4 (En bleu).

2.2- Le critère de précision du cahier des charges impose une erreur nulle en réponse à une consigne en rampe. Donc la FTBO corrigée doit être de classe 2. Or la FTBO non corrigée est de classe 1. Donc le correcteur doit être de classe 1. **Donc le correcteur doit avoir un intégrateur.**

2.3- D'où l'utilisation d'un correcteur proportionnel intégral de fonction de transfert :

$$C(p) = K_P + \frac{K_i}{p} = \frac{K_i + K_p.p}{p} = \frac{K_i.\left(1 + \frac{K_P}{K_i}.p\right)}{p} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{C(p) = \frac{K.(1 + T.p)}{p}} \quad \left|\ \mathbf{Avec : K = K_i \quad Et : T = \frac{K_p}{K_i}}\right.$$

2.4- Etant donné la FTBO non corrigé sa phase à 30 rad.s^{-1} est de :

$$\mathbf{\varphi_{BONC}(30) = -90° - \arctan\left(\frac{2\times 1,03.\frac{30}{7\,600}}{1 - \frac{30^2}{7\,600^2}}\right) = -90,5°}$$

On peut aussi remarquer que : 30 rad.s^{-1} << ω_0 = 7 600 rad.s^{-1} Donc : $\varphi_{BONC}(30) \approx -90°$

Pour une marge de phase de 60° (critère de stabilité) à la pulsation de coupure ω_{0dB} = 30 rad.s^{-1} (critère de rapidité) il faut donc un correcteur dont $\varphi_{Cor}(30)$ la phase à 30 rad.s^{-1} est telle que :

$$60° = 180° - 90,5° + \varphi_{Cor}(30) \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{\varphi_{Cor}(30) = 60° + 90,5° - 180° = -29,5°}$$

Or un correcteur PI a une phase variant de –90° à 0°. Donc ce correcteur peut convenir.

La phase de ce correcteur est de : $\varphi_{Cor}(\omega) = -90° + \arctan(T.\omega)$ Il faut donc :

$$\varphi_{Cor}(30) = -29,5° = -90° + \arctan(30.T) \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{T = \frac{\tan(90° - 29,5°)}{30} = 0,059\ s}$$

2.4- Etant donné la FTBO non corrigé son gain dynamique à 30 rad.s^{-1} est de :

$$\mathbf{G_{dBBONC}(30) = 20.\log 66,8 - 20.\log 30 - 10.\log\left(\left(1 - \frac{30^2}{7\,600^2}\right)^2 + 4\times 1,03^2.\frac{30^2}{7\,600^2}\right) = 6,95\ dB}$$

Où ayant : 30 rad.s^{-1} << ω_0 = 7 600 rad.s^{-1} $\Rightarrow$ $G_{dBBONC}(30) \approx 20.\log 66,8 - 20.\log 30 = 6,95$ dB

2.5- Pour avoir une pulsation de coupure à 0dB de la FTBO corrigée il faut $G_{dBCor}(30)$ le gain dynamique du correcteur tel que : $G_{dBCor}(30) + G_{dBBONC}(30) = 0 \Rightarrow G_{dBCor}(30) = -6,95$ dB

Or le gain dynamique du correcteur PI est : $G_{dBCor}(\omega) = 20.\log K - 20.\log \omega + 10.\log(1 + (T.\omega)^2)$

On a donc : $20.\log K = -6,95 + 20.\log 30 - 10.\log(1 + (0,059\times 30)^2) = 16,43$ dB

Le gain statique du correcteur doit donc être de : $\mathbf{K = 10^{(16,43/20)} = 6,6\ A.V^{-1}.s^{-1}}$

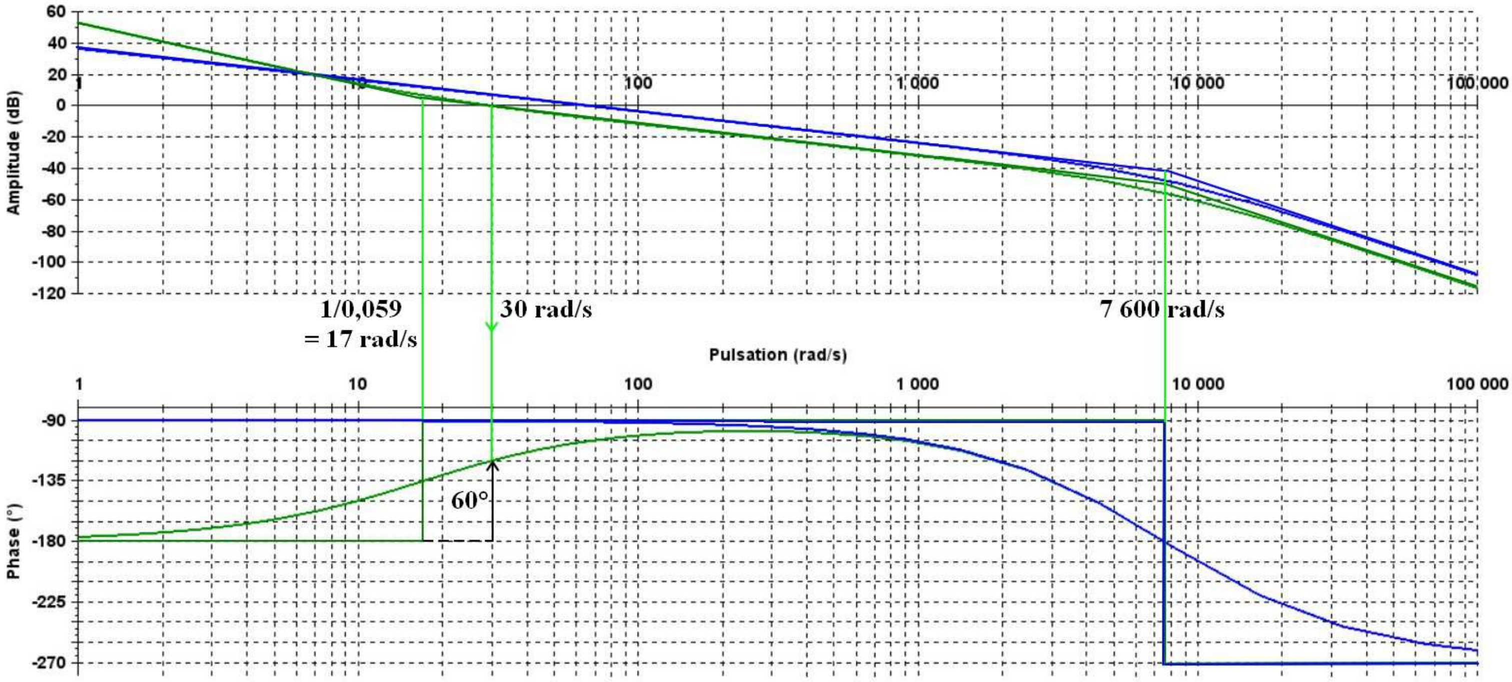
2.6- On en déduit les gains intégral et proportionnel du correcteur PI : $\mathbf{K_i = K = 6,6\ A.V^{-1}.s^{-1}}$

Et : $\mathbf{K_p = K_i.T = 0,39\ A.V^{-1}}$

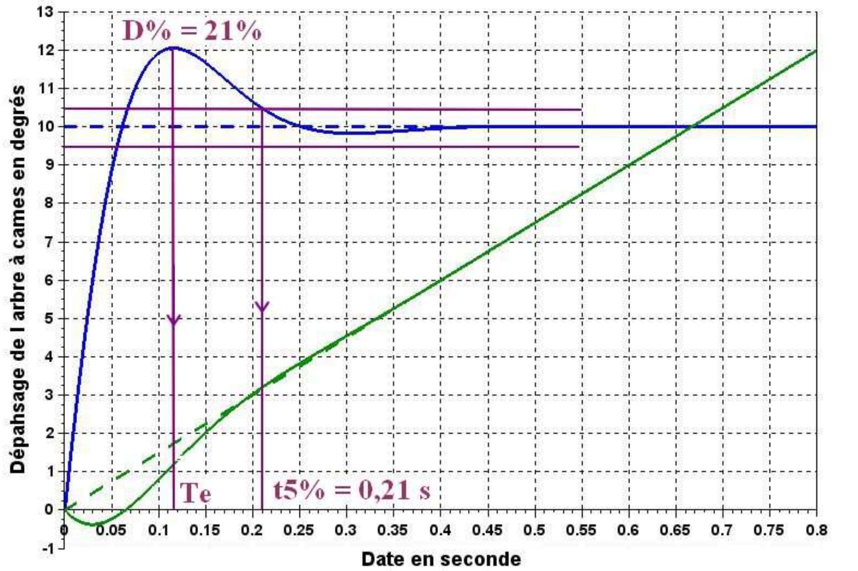
Et la FTBO corrigée : $\mathbf{H_{BO}(p) = C(p).H_{BONC}(p) = \dfrac{441.(1 + 0,059.p)}{p^2.(1 + 2,71.10^{-4}.p + 1,73.10^{-8}.p^2)}}$

Diagrammes de Bode de la FTBO

Non corrigé en bleu **Corrigée en Vert**



2.7- Une simulation numérique avec ce correcteur donne les réponses ci-dessous à une consigne en échelon de 10° puis en rampe de pente 15°/s avec une perturbation $f_R(t)$ = 50N démarrant à la date t= 0.



Cela est conforme à ce qui pouvait être attendu :

- ☞ L'intégrateur du correcteur permet une FTBO de classe 2 et donc une erreur de trainage nulle.
- ☞ La pulsation de coupure à 30 rad.s^{-1} permet un temps d'établissement T_e = 0,115 s ≈ $\frac{3}{30}$
- ☞ La marge de phase de 60° limite le dépassement à environ 20 % et donc permet un temps de réponse à 5% d'un plus de 0,1 s mais inférieure à 0,25 s.

Ainsi corrigé l'asservissement répond à tous les critères du cahier des charges :

- ☞ Une marge de phase de 60°
- ☞ Une erreur de trainage nulle en réponse à une rampe
- ☞ Un temps de réponse à 5 % de $t_{5\%}$ = 0,21 s ≤ 250 ms