Condition fondamentale de stabilité : Critère algébrique

1- Définition

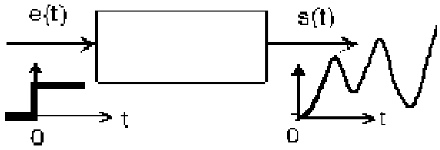
1.1- Stabilité

Un système dynamique est stable si à une entrée bornée sur [0,+∞] il répond par une sortie bornée sur [0,+∞].

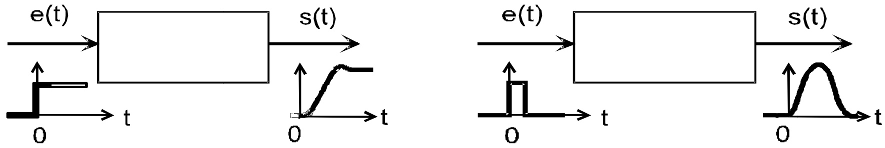
Remarque :

Un système est stable si la réponse libre du système tend vers zéro à l'infini. La réponse libre étant la réponse à une entrée tendant vers 0 à l'infini : Comme par exemple une impulsion telle l'impulsion de Dirac.

Exemple de système instable



Exemple de système stable



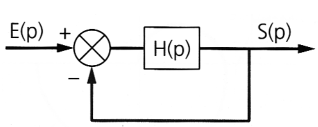
Etudier la réponse libre d'un système, revient à écarter le système de sa position d'équilibre (Par exemple par une entrée de type impulsion et à analyser sa réponse. Ce système est :

- ☞ Stable si il a tendance à revenir dans sa position d'équilibre.
- ☞ Instable si il a tendance à s'en écarter.
- ☞ Juste stable ou oscillant si il ne revient pas dans sa position d'équilibre mais ne s'en écarte pas.

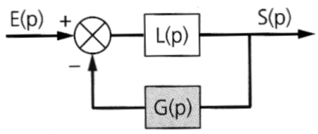
1.2- Equation caractéristique et pôles d'un système linéaire

On a montré (voir cours sur la précision des asservissements) que tout asservissement avec un fonctionnement normal peut se ramener à un schéma bloc à retour unitaire ou non unitaire. (voir schémas blocs ci-contre)

Retour unitaire



Retour non unitaire



On en déduit que la fonction de transfert en boucle fermée de l'asservissement : FTBF(p) peut s'écrire en fonction de la fonction de transfert en boucle ouverte : FTBO(p) :

$$FTBF(p) = \frac{FTBO(p)}{1 + FTBO(p)}$$

soit si on a : $FTBO(p) = \dfrac{K_{BO}}{p^{\alpha}} \cdot \dfrac{N_{BO}(p)}{D_{BO}(p)}$

$$FTBF(p) = \frac{\dfrac{K_{BO}}{p^{\alpha}} \cdot \dfrac{N_{BO}(p)}{D_{BO}(p)}}{1 + \dfrac{K_{BO}}{p^{\alpha}} \cdot \dfrac{N_{BO}(p)}{D_{BO}(p)}}$$

Soit :

$$\mathbf{FTBF(p) = \frac{K_{BO}.N_{BO}(p)}{p^{\alpha}.D_{BO}(p) + K_{BO}.N_{BO}(p)}}$$

Les pôles de la FTBF sont les zéros de son dénominateur $D_{BF}(p)$

Soit les solutions complexes de l'équation $D_{BF}(p) = 0$

or : $p^{\alpha}.D_{BO}(p) + K_{BO}.N_{BO}(p) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 1 + FTBO(p) = 0$ Donc :

Les pôles de la FTBF sont les solutions complexes de l'équation caractéristique de l'asservissement : $1 + FTBO(p) = 0$

Remarque : Pour un asservissement il n'y a pas de pôles nuls car il faudrait $K_{BO} = 0$

2- Stabilité d'une fonction de transfert : FTBO ou FTBF

2.1- Réponse du système à une impulsion de Dirac : E(p) = 1

Soit une fonction de transfert ayant des pôles réels et complexes : n_r pôles réels p_{ri} et n_c paires de pôles complexes conjugués : $p_{ci} = a_i \pm b_i.j$.

On en déduit que le dénominateur D(p) de la FTBF s'écrit :

$$D_{BF}(p) = \frac{\prod_{i=1}^{n_r} (p - p_{ri}) \cdot \prod_{i=1}^{n_c} \left[(p - a_i)^2 + b_i^2 \right]}{\prod_{i=1}^{n_r} |p_{ri}| \cdot \prod_{i=1}^{n_c} |p_{ci}|}$$

Dans ce cas la réponse du système à une impulsion de Dirac en entrée E(p) = 1 est : $S(p) = H_{BF}(p)$

On montre alors (C'est la décomposition en éléments simples) que pour un numérateur constant $N_{BF}(p) = K$ cette fonction symbolique de la sortie peut s'écrire sous la forme d'une somme :

$$S(p) = \sum_{i=1}^{n_r} \frac{K_{ri}}{p - p_{ri}} + \sum_{i=1}^{n_c} \frac{K_{ci}}{(p - a_i)^2 + b_i^2}$$

Par la transformée inverse de S(p) on obtient donc la réponse temporelle à une impulsion de Dirac :

$$\mathbf{s(t) = \sum_{i=1}^{n_r} K_{ri}.e^{p_{ri}.t} + \sum_{i=1}^{n_c} \frac{K_{ci}}{b_i}.\, e^{a_i.t}.\sin(b_i.t)}$$

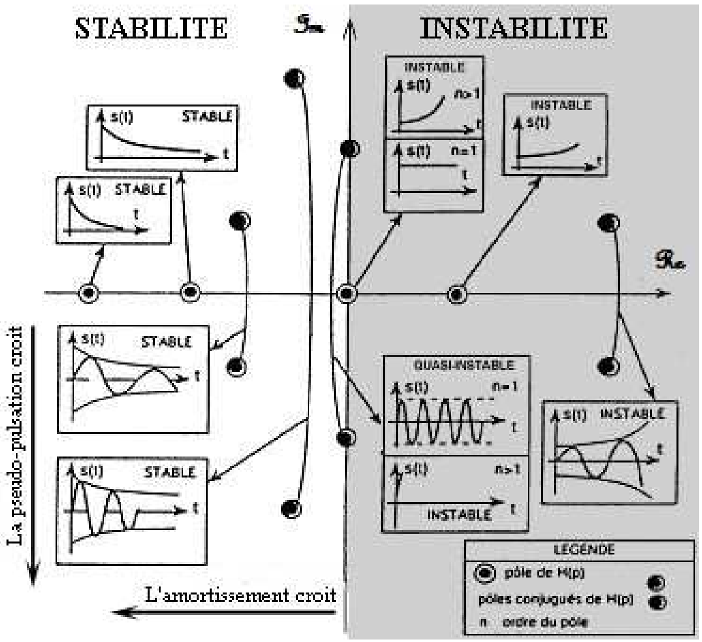
Remarque : Dans le cas où $N_{BO}(p)$ n'est pas une constante, on a une réponse similaire avec des polynômes en t en lieu et place des constantes K_{ri} et K_{ci}.

2.2- Condition fondamentale de stabilité Critère algébrique

Le système est stable si pour une impulsion de Dirac la réponse $s(t) \to 0$ pour $t \to \infty$. Il est donc stable si et seulement si les différentes valeurs des p_{ri} et a_i sont négatives.

Donc un système linéaire est stable si tous les pôles de sa fonction de transfert sont à partie réelle négative.

2.3- Position des pôles dans le plan complexe



Cas particulier 1 :

Un système présentant un certain nombre de pôles complexes à partie réelle nulle est un système juste oscillant (ou système marginalement stable ou quasi-instable).

Cas particulier 2 :

Un système « intégrateur pur » ($FTBF(p) = \frac{1}{p}$) est un système instable car une entrée en échelon conduit à une sortie en rampe.

3- Modes dominants

3.1- Pôles dominants : Définitions

On appelle mode de fonctionnement le comportement du système associée soit à un pôle réel soit à une paire de pôles complexes conjugués. Les modes de comportement correspondent évidemment aux différents termes de la réponse impulsionnelle du système dont la réponse est :

$$s(t) = \sum_{i=1}^{n_s} K_{ri}.e^{p_{ri}.t} + \sum_{i=1}^{n_c} \frac{K_{ci}}{b_i} . e^{a_i.t}.\sin(b_i.t)$$

Pour un système stable (parties réelles des pôles négatives) plus les parties réelles sont proches de 0 plus la convergence due à l'amortissement est lente et donc plus le système a un comportement proche de ces modes. Donc :

On appelle pôles dominants de la fonction de transfert en boucle fermée (FTBF) du système les pôles les plus proches de l'axe imaginaire.

3.2- Approximation du fonctionnement du système par les modes dominants

On appelle modes dominants les modes de fonctionnement associés aux pôles dominants.

L'expression de la fonction de transfert peut donc être approximée par une fonction de transfert dont le dénominateur est défini par les seuls pôles dominants.

Donc si on a un système avec une FTBF dont le numérateur est un gain pur K_{BF}, avec n_r pôles réels p_{ri} et n_c paires de pôles complexes conjugués $p_{ci} = a_i \pm b_i.j$ tous à parties réelles négatives alors :

$$FTBF(p) = \frac{K_{BF} \prod_{i=1}^{n_r} |p_{ri}| . \prod_{i=1}^{n_c} (a_i^2 + b_i^2)}{\prod_{i=1}^{n_r} (p - p_{ri}) . \prod_{i=1}^{n_c} [(p - a_i)^2 + b_i^2]}$$

Cette fonction peut s'écrire sous sa forme canonique :

$$FTBF(p) = \frac{K_{BF}}{\prod_{i=1}^{n_r} \left(1 + \frac{p}{|p_{ri}|}\right) . \prod_{i=1}^{n_c} \left(\frac{(p - a_i)^2 + b_i^2}{a_i^2 + b_i^2}\right)}$$

Elle peut être approximée par la fonction de transfert correspondant au mode dominant :

$$FTBF_{md}(p) = \frac{K_{BF}}{1 + \frac{p}{|p_D|}}$$ **si on a un pôle dominant réel p_D**

$$FTBF_{md}(p) = \frac{K_{BF}}{\frac{(p - a_D)^2 + b_D^2}{a_D^2 + b_D^2}}$$ **si on a une paire de pôles dominant $a_D \pm b_D.j$**

Exemple :

Soit un système dont la FTBF est : $H_{BF}(p) = \dfrac{1}{1 + 5,35.p + 1,775.p^2 + 0,125.p^3}$

Les pôles de cette FTBF sont : $p_1 = -10$ $p_2 = -4$ $p_3 = -0,2$

La FTBF peut alors être approximée par : $H_{BF}(p) \approx \dfrac{1}{1 + 5.p}$