

# Géométrie des masses : Opérateur d'inertie

## 1- Cas général

L'opérateur d'inertie est un objet mathématique modélisant la répartition des masses d'un solide autour d'un point dans les trois directions de l'espace. Il peut s'écrire de différentes manières suivant le point où on l'exprime et le repère dans lequel on l'exprime. Dans tout les cas il s'écrit sous la forme d'une matrice symétrique.

### 1.1- Opérateur d'inertie en un point quelconque A dans la base liée au solide $R_S$

Si on pose dans le repère  $R_S$  lié au solide S les coordonnées du vecteur  $\overrightarrow{GP}$  :

$$\overrightarrow{AP} = \begin{pmatrix} x_{AP} \\ y_{AP} \\ z_{AP} \end{pmatrix}_{R_S} \quad \text{Alors :} \quad \overline{J_A(S)} = \begin{pmatrix} A_A & -F_A & -E_A \\ -F_A & B_A & -D_A \\ -E_A & -D_A & C_A \end{pmatrix}_{R_S} \quad \text{où :}$$

$A, B$  et  $C$  sont respectivement les moments d'inertie de S par rapport aux axes  $(A, \overrightarrow{X})$ ,  $(A, \overrightarrow{Y})$ ,  $(A, \overrightarrow{Z})$ .

$$A_A = \iiint_S (y_{AP}^2 + z_{AP}^2) \cdot dm \quad B_A = \iiint_S (x_{AP}^2 + z_{AP}^2) \cdot dm \quad C_A = \iiint_S (x_{AP}^2 + y_{AP}^2) \cdot dm$$

Et  $D, E$  et  $F$  sont les produits d'inertie ou balourds perpendiculaires au point A

$$D_A = \iiint_S y_{AP} \cdot z_{AP} \cdot dm \quad E_A = \iiint_S x_{AP} \cdot z_{AP} \cdot dm \quad F_A = \iiint_S x_{AP} \cdot y_{AP} \cdot dm$$

### 1.2- Opérateur d'inertie au centre de gravité G dans la base liée au solide $R_S$

Si on pose dans le repère  $R_S$  lié au solide S les coordonnées du vecteur  $\overrightarrow{GP}$  :

$$\overrightarrow{GP} = \begin{pmatrix} x_{GP} \\ y_{GP} \\ z_{GP} \end{pmatrix}_{R_S} \quad \text{Alors :} \quad \overline{J_G(S)} = \begin{pmatrix} A_G & -F_G & -E_G \\ -F_G & B_G & -D_G \\ -E_G & -D_G & C_G \end{pmatrix}_{R_S} \quad \text{où :}$$

$A, B$  et  $C$  sont respectivement les moments d'inertie de S par rapport aux axes  $(G, \overrightarrow{X})$ ,  $(G, \overrightarrow{Y})$ ,  $(G, \overrightarrow{Z})$ .

$$A_G = \iiint_S (y_{GP}^2 + z_{GP}^2) \cdot dm \quad B_G = \iiint_S (x_{GP}^2 + z_{GP}^2) \cdot dm \quad C_G = \iiint_S (x_{GP}^2 + y_{GP}^2) \cdot dm$$

Et  $D, E$  et  $F$  sont les produits d'inertie ou balourds perpendiculaires au point G

$$D_G = \iiint_S y_{GP} \cdot z_{GP} \cdot dm \quad E_G = \iiint_S x_{GP} \cdot z_{GP} \cdot dm \quad F_G = \iiint_S x_{GP} \cdot y_{GP} \cdot dm$$

## 2- Théorème de Huygens

### 2.1- Théorème de Huygens généralisé

Soit : ☞ Un solide S de masse M et de centre d'inertie G

☞  $\overline{J_G(S)}$  L'opérateur d'inertie du solide S en G

☞  $\overline{J_A(S)}$  L'opérateur d'inertie du solide S en A

Alors quelque soit le point A et le vecteur  $\overrightarrow{U}$  on a :

$$\overline{J_A(S)} \cdot \overrightarrow{U} = \overline{J_G(S)} \cdot \overrightarrow{U} + M \cdot \overrightarrow{AG} \wedge \overrightarrow{U} \wedge \overrightarrow{AG}$$

Voir démonstration §4

Si on pose :  $\overline{\overline{J_G(S)}} = \begin{pmatrix} A_G & -F_G & -E_G \\ -F_G & B_G & -D_G \\ -E_G & -D_G & C_G \end{pmatrix}_{R_S}$   $\overline{\overline{J_A(S)}} = \begin{pmatrix} A_A & -F_A & -E_A \\ -F_A & B_A & -D_A \\ -E_A & -D_A & C_A \end{pmatrix}_{R_S}$  et :  $\overrightarrow{AG} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}_{R_S}$

On a alors : Voir démonstration §4

$$\overline{\overline{J_A(S)}} = \overline{\overline{J_G(S)}} + M \cdot \begin{pmatrix} b^2 + c^2 & -a.b & -a.c \\ -a.b & a^2 + c^2 & -b.c \\ -a.c & -b.c & a^2 + b^2 \end{pmatrix}_{R_S} \quad \text{avec } \overrightarrow{AG} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}_{R_S}$$

## 2.2- Remarque

Le théorème de Huygens ne s'applique que entre un point A quelconque et le centre d'inertie. Mais pas entre deux points quelconques :

$$\overline{\overline{J_A(S)}} \neq \overline{\overline{J_B(S)}} + M \cdot \begin{pmatrix} b^2 + c^2 & -a.b & -a.c \\ -a.b & a^2 + c^2 & -b.c \\ -a.c & -b.c & a^2 + b^2 \end{pmatrix}_{R_S} \quad \text{avec } \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}_{R_S}$$

## 2.3- Cas du moment d'inertie

Soit un solide S de masse m de centre d'inertie G appartenant à l'axe Δ et de moment d'inertie J<sub>Δ</sub> par rapport à l'axe Δ. On a d'autre part un axe Δ' parallèle à l'axe Δ et distant de celui-ci d'une distance d.

Alors J<sub>Δ'</sub> le moment d'inertie du solide S par rapport à l'axe Δ' est :

## 2- Cas particuliers

### 2.1- Un plan de symétrie

Si le solide accepte un plan de symétrie, alors dans un repère dont deux des axes sont inclus dans ce plan de symétrie, la matrice a deux produits d'inertie nuls.

Exemple : Pour une symétrie de plan (A,  $\overrightarrow{X}$ ,  $\overrightarrow{Y}$ ) :

$$\overline{\overline{J_A(S)}} = \begin{pmatrix} A & -F & 0 \\ -F & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}_{R_S}$$

### 2.2- Deux plans de symétrie

Si le solide accepte deux plans de symétrie, alors dans un repère dont deux des axes sont inclus dans ces plans de symétrie, la matrice a tous ses produits d'inertie nuls : elle est diagonale.

Exemple : Pour 2 symétries de plans (A,  $\overrightarrow{X}$ ,  $\overrightarrow{Y}$ ) et (A,  $\overrightarrow{Y}$ ,  $\overrightarrow{Z}$ ) :

$$\overline{\overline{J_A(S)}} = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}_{R_S}$$

### 2.3- Solide de révolution

Si le solide est de révolution d'axe confondu avec celui du repère. Alors la matrice a tous ses produits d'inertie nuls : elle est diagonale et a deux moments d'inertie identiques :

Exemple : Pour un solide de révolution d'axe (G,  $\overrightarrow{Z}$ ) :

$$\overline{\overline{J_G(S)}} = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}_{R_S}$$

## **2.4- Epaisseur très faible : Tôle**

Si le solide est plan et a une épaisseur très faible (C'est par exemple une tôle plane), alors dans un repère dont deux des axes sont inclus dans ce plan, la matrice a deux produits d'inertie nuls et un moment d'inertie est égal à la somme des deux autres

Exemple : Pour 1 solide très mince dans le plan  $(A, \overrightarrow{X}, \overrightarrow{Y})$  :

## **2.5- Cylindre**

Si le solide est un cylindre homogène de masse  $M$  de rayon  $r$  et de Hauteur  $h$ . La matrice d'inertie dans le repère  $R_S$  dont l'axe  $(G, \overrightarrow{Z})$  est celui du cylindre est de la forme :

## **2.6- Parallélépipède**

Si le solide est un parallélépipède homogène de masse  $M$  de largeur  $a$  (Sur  $\overrightarrow{X}$ ) de longueur  $b$  (Sur  $\overrightarrow{Y}$ ) et de hauteur  $h$  (Sur  $\overrightarrow{Z}$ ). La matrice d'inertie dans le repère  $R_S$  dont l'axe  $(G, \overrightarrow{Z})$  est orienté suivant la hauteur et dont l'axe  $(G, \overrightarrow{Y})$  est orienté suivant la longueur est de la forme :

## **2.7- Barre**

Si le solide est une barre de masse  $M$  de dimensions très petites devant la longueur  $L$  alors la matrice d'inertie dans le repère  $R_S$  dont l'axe  $(G, \overrightarrow{Z})$  est orienté suivant la longueur est de la forme :

## **2.8- Sphère**

Si le solide est une sphère homogène de masse  $M$  alors la matrice d'inertie dans tout repère  $R_S$  est :

## **2.9- Cube**

Si le solide est un cube homogène de masse  $M$  alors la matrice d'inertie dans tout repère  $R_S$  est :

### 3- Changement de base par rotation autour d'un axe

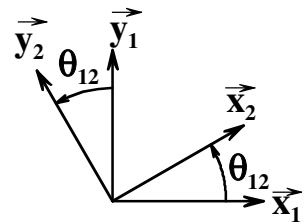
#### 3.1- Cas général

Soit deux bases orthonormées directes :  $\mathcal{B}_1$  et  $\mathcal{B}_2$ .

Ces deux base sont telles que la base  $\mathcal{B}_2$  se déduit de la base  $\mathcal{B}_1$  par une rotation :

d'axe :  $(A, \vec{z}_1) = (A, \vec{z}_2)$

et : d'angle :  $\theta_{12} = (\vec{x}_1, \vec{x}_2) = (\vec{y}_1, \vec{y}_2)$



On donne l'opérateur d'inertie du solide S au point A dans la base  $\mathcal{B}_1$  par la matrice :

$$\overline{\overline{J_A(S)}}_{\mathcal{B}_1} = \begin{pmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_1}$$

On alors les matrices de changement de base (matrices de rotation) :

$$\begin{array}{l|l} \text{De la base 1 à la base 2 :} & \text{De la base 2 à la base 1 :} \\ P_{1 \rightarrow 2} = \begin{pmatrix} \cos \theta_{12} & -\sin \theta_{12} & 0 \\ \sin \theta_{12} & \cos \theta_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & P_{2 \rightarrow 1} = \begin{pmatrix} \cos \theta_{12} & \sin \theta_{12} & 0 \\ -\sin \theta_{12} & \cos \theta_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = P_{1 \rightarrow 2}^{-1} \end{array}$$

Et l'opérateur d'inertie du solide S au point A dans la base  $\mathcal{B}_2$  par la matrice :

$$\overline{\overline{J_A(S)}}_{\mathcal{B}_2} = P_{2 \rightarrow 1} \cdot \overline{\overline{J_A(S)}}_{\mathcal{B}_1} \cdot P_{1 \rightarrow 2} = P_{1 \rightarrow 2}^{-1} \cdot \overline{\overline{J_A(S)}}_{\mathcal{B}_1} \cdot P_{1 \rightarrow 2}$$

#### 3.2- Cas du solide de révolution

Soit un solide de révolution d'axe  $(A, \vec{z}_1)$  son opérateur d'inertie est

$$\overline{\overline{J_A(S)}}_{\mathcal{B}_1} = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_1}$$

Dans la base  $\mathcal{B}_2$  obtenue par une rotation d'axe  $(A, \vec{z}_1) = (A, \vec{z}_2)$  et d'angle  $\theta_{12} = (\vec{x}_1, \vec{x}_2)$  on a

$$\text{alors : } \overline{\overline{J_A(S)}}_{\mathcal{B}_2} = \begin{pmatrix} \cos \theta_{12} & \sin \theta_{12} & 0 \\ -\sin \theta_{12} & \cos \theta_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta_{12} & -\sin \theta_{12} & 0 \\ \sin \theta_{12} & \cos \theta_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\overline{\overline{J_A(S)}}_{\mathcal{B}_2} = \begin{pmatrix} \cos \theta_{12} & \sin \theta_{12} & 0 \\ -\sin \theta_{12} & \cos \theta_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \cdot \cos \theta_{12} - A \cdot \sin \theta_{12} & 0 \\ A \cdot \sin \theta_{12} & A \cdot \cos \theta_{12} & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}$$

$$\overline{\overline{J_A(S)}}_{\mathcal{B}_2} = \begin{pmatrix} A \cdot \cos^2 \theta_{12} + A \cdot \sin^2 \theta_{12} & -A \cdot \sin \theta_{12} \cdot \cos \theta_{12} + A \cdot \cos \theta_{12} \cdot \sin \theta_{12} & 0 \\ -A \cdot \cos \theta_{12} \cdot \sin \theta_{12} + A \cdot \sin \theta_{12} \cdot \cos \theta_{12} & A \cdot \sin^2 \theta_{12} + A \cdot \cos^2 \theta_{12} & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}$$

$$\text{Soit finalement : } \overline{\overline{J_A(S)}}_{\mathcal{B}_2} = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_2} \quad \forall \theta_{12}$$

**Remarque cela est aussi vrai pour un parallélépipède de section carrée qui est donc "de révolution"**

#### 3.2- Cas du solide sphérique

Soit un solide sphérique son opérateur d'inertie est

$$\overline{\overline{J_A(S)}}_{\mathcal{B}_1} = \begin{pmatrix} J & 0 & 0 \\ 0 & J & 0 \\ 0 & 0 & J \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_1}$$

on montre aussi que

$$\text{quelque soit la base } \mathcal{B}_2 : \overline{\overline{J_A(S)}}_{\mathcal{B}_2} = \begin{pmatrix} J & 0 & 0 \\ 0 & J & 0 \\ 0 & 0 & J \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_2}$$

**Remarque: cela est aussi vrai pour un cube qui est donc "sphérique"**