

Mandrin anti centrifuge : Corrigé

1.1- Graphe de structure

Degré de mobilité du mécanisme est de : $M = 1$

Nombre de pièce hors bâti est : $(N_P - 1) = 6 - 1 = 5$

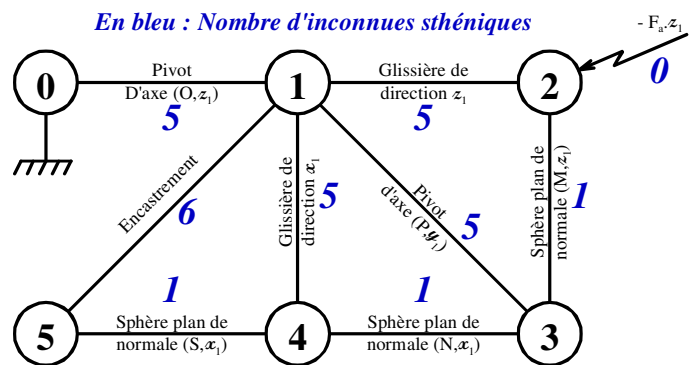
Le Nombre d'inconnues sthéniques :

$$I_S = 6 + 5 \times 4 + 1 \times 3 = 29$$

D'où le degré d'hyperstatisme du mécanisme :

$$H = 29 + 1 - 6 \times 5 \quad \mathbf{H = 0}$$

Il est donc possible de déterminer toutes les actions sthéniques par le PFD.



2- Ordonnement des isolement

- ☞ On isole le solide 2 et on applique un TRD en projection sur $\vec{z}_1$ On en déduit l'action de 2→3.
- ☞ On isole le solide 3 et on applique un TMD en P en projection sur $\vec{y}_1$ On en déduit l'action de 3→4.
- ☞ On isole le solide 4 et on applique un TRD en projection sur $\vec{x}_1$ On en déduit l'action de 4→5.

3- Géométrie des masses

Etant donné la symétrie du levier 3 par rapport au plan $(P, \vec{x}_3, \vec{z}_3)$ on en déduit la forme de la matrice d'inertie du solide 3 au point P dans le repère $\mathcal{R}_3 = \mathcal{R}_1$:

$$\overline{\mathbf{I}_P(3)} = \begin{pmatrix} A & 0 & -E \\ 0 & B & 0 \\ -E & 0 & C \end{pmatrix}_{\mathcal{R}_1}$$

Le levier 3 à une masse m_3 et un centre de gravité G_3 tel que : $\vec{PG}_3 = -e \cdot \vec{x}_1 - d \cdot \vec{z}_1$

Donc d'après le théorème de Huygens : $\overline{\mathbf{I}_P(3)} = \overline{\mathbf{I}_{G_3}(3)} + m_3 \begin{pmatrix} d^2 & 0 & -e \cdot d \\ 0 & e^2 + d^2 & 0 \\ -e \cdot d & 0 & e^2 \end{pmatrix}_{\mathcal{R}_1}$

Donc : $\overline{\mathbf{I}_{G_3}(3)} = \overline{\mathbf{I}_P(3)} - m_3 \begin{pmatrix} d^2 & 0 & -e \cdot d \\ 0 & e^2 + d^2 & 0 \\ -e \cdot d & 0 & e^2 \end{pmatrix}_{\mathcal{R}_1}$

Soit : $\overline{\mathbf{I}_{G_3}(3)} = \begin{pmatrix} A - m_3 \cdot d^2 & 0 & -E + m_3 \cdot e \cdot d \\ 0 & B - m_3 \cdot (e^2 + d^2) & 0 \\ -E + m_3 \cdot e \cdot d & 0 & C - m_3 \cdot e^2 \end{pmatrix}_{\mathcal{R}_1}$

4- Application du PFD

On isole le solide 2, Bilan des Actions Mécaniques Extérieures :

- ☞ Action de 1→2 due à la liaison glissière de direction $\vec{z}_1$
- ☞ Action de 3→2 due à la liaison sphère plan de normale $(M, \vec{z}_1)$: Force $\vec{F}_{3 \rightarrow 2} = Z_{32} \cdot \vec{z}_1$ appliquée en M
- ☞ Action de l'actionneur sur 2 modélisée par une force de résultante : $\vec{F}_a = -F_a \cdot \vec{z}_1$ appliquée en O

L'application du TRD en projection sur $\vec{z}_1$ donne donc : $0 + Z_{32} - F_a = m_2 \cdot \overline{a_{G2 \in 2/0}} \cdot \vec{z}_1$

Or le mouvement de 2 par rapport à 0 étant une rotation d'axe $(O, \vec{z}_1)$: $m_2 \cdot \overline{a_{G2 \in 2/0}} \cdot \vec{z}_1 = 0$

On obtient donc : $Z_{32} = F_a$ Soit par le principe des actions mutuelles : $Z_{23} = -F_a$

Donc l'action de 2→3 est une force $\vec{F}_{2 \rightarrow 3} = -F_a \cdot \vec{z}_1$ appliquée en M

On isole le solide 3, et lui applique un théorème du moment dynamique en P. Nous allons donc calculer le moment dynamique en P du solide 3 dans son mouvement par rapport à 0 : $\delta_P(3/0)$.

Calculs de cinématiques :

Le mouvement de 3 par rapport à 0 est une rotation d'axe $(O, \vec{z}_1)$ donc :

$$\vec{V}_{P \in 3/0} = \vec{V}_{O \in 3/0} + \vec{PO} \wedge \vec{\Omega}_{3/0} = \vec{0} - a \cdot \vec{x}_1 \wedge \omega \cdot \vec{z}_1 \Rightarrow \vec{V}_{P \in 3/0} = a \cdot \omega \cdot \vec{y}_1$$

$$\vec{V}_{G3 \in 3/0} = \vec{V}_{O \in 3/0} + \vec{G_3O} \wedge \vec{\Omega}_{3/0} = \vec{0} - [(a - e) \cdot \vec{x}_1 + d \cdot \vec{z}_1] \wedge \omega \cdot \vec{z}_1 \Rightarrow \vec{V}_{G3 \in 3/0} = (a - e) \cdot \omega \cdot \vec{y}_1$$

D'autre part, par dérivation vectorielle on a :

$$\vec{a}_{G3 \in 3/0} = \left(\frac{d \vec{V}_{G3 \in 3/0}}{dt} \right)_{\mathcal{R}_0} = \left(\frac{d \vec{V}_{G3 \in 3/0}}{dt} \right)_{\mathcal{R}_1} + \vec{\Omega}_{3/0} \wedge \vec{V}_{G3 \in 3/0} \quad \text{avec : } \vec{V}_{G3 \in 3/0} = (a - e) \cdot \omega \cdot \vec{y}_1$$

$$\text{Or } \dot{\omega} = 0. \text{ Donc : } \vec{a}_{G3 \in 3/0} = \vec{0} + \omega \cdot \vec{z}_1 \wedge (a - e) \cdot \omega \cdot \vec{y}_1 \quad \text{Soit : } \vec{a}_{G3 \in 3/0} = -(a - e) \cdot \omega^2 \cdot \vec{x}_1$$

Calculs de cinétique au point P :

$$\text{On a : } \sigma_P(3/0) = \overline{\mathbf{I}_P(3)} \cdot \vec{\Omega}_{3/0} + m_3 \cdot \vec{PG}_3 \wedge \vec{V}_{P \in 3/0}$$

$$\overrightarrow{\sigma_P(3/0)} = \begin{pmatrix} A & 0 & -E \\ 0 & B & 0 \\ -E & 0 & C \end{pmatrix}_{\mathcal{R}_1} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix}_{\mathcal{R}_1} + m_3 \cdot \begin{pmatrix} -e \\ 0 \\ -d \end{pmatrix}_{\mathcal{R}_1} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ a \cdot \omega \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{R}_1} = \begin{pmatrix} -E \cdot \omega \\ 0 \\ C \cdot \omega \end{pmatrix}_{\mathcal{R}_1} + \begin{pmatrix} m_3 \cdot a \cdot d \cdot \omega \\ 0 \\ -m_3 \cdot a \cdot e \cdot \omega \end{pmatrix}_{\mathcal{R}_1}$$

Soit finalement :

$$\overrightarrow{\sigma_P(3/0)} = \begin{pmatrix} -(E - m_3 \cdot a \cdot d) \cdot \omega \\ 0 \\ (C - m_3 \cdot a \cdot e) \cdot \omega \end{pmatrix}_{\mathcal{R}_1}$$

D'autre part : $\overrightarrow{\delta_P(3/0)} = \left(\frac{d \overrightarrow{\sigma_P(3/0)}}{dt} \right)_{\mathcal{R}_0} + m_3 \cdot \overrightarrow{V_{P/0}} \wedge \overrightarrow{V_{G3 \in 3/0}}$ avec : $\overrightarrow{V_{P/0}} = \overrightarrow{V_{P \in 3/0}}$ car $P \in 3$

$$\overrightarrow{\delta_P(3/0)} = \left(\frac{d \overrightarrow{\sigma_P(3/0)}}{dt} \right)_{\mathcal{R}_0} + m_3 \cdot \overrightarrow{V_{P \in 3/0}} \wedge \overrightarrow{V_{G3 \in 3/0}} \quad \text{Or : } \overrightarrow{V_{P \in 3/0}} // \overrightarrow{V_{G3 \in 3/0}}$$

$$\overrightarrow{\delta_P(3/0)} = \left(\frac{d \overrightarrow{\sigma_P(3/0)}}{dt} \right)_{\mathcal{R}_1} + \overrightarrow{\Omega_{3/0}} \wedge \overrightarrow{\sigma_P(3/0)} \quad \text{Or : } \overrightarrow{\sigma_P(3/0)} = \begin{pmatrix} -(E - m_3 \cdot a \cdot d) \cdot \omega \\ 0 \\ (C - m_3 \cdot a \cdot e) \cdot \omega \end{pmatrix}_{\mathcal{R}_1} \quad \text{et : } \dot{\omega} = 0$$

$$\overrightarrow{\delta_P(3/0)} = \vec{0} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix}_{\mathcal{R}_1} \wedge \begin{pmatrix} -(E - m_3 \cdot a \cdot d) \cdot \omega \\ 0 \\ (C - m_3 \cdot a \cdot e) \cdot \omega \end{pmatrix}_{\mathcal{R}_1} \quad \text{Soit : } \overrightarrow{\delta_P(3/0)} = -(E - m_3 \cdot a \cdot d) \cdot \omega^2 \cdot \overrightarrow{y_1}$$

Calculs de cinétique au point G_3 :

G_3 étant le centre d'inertie de 3 on a : $\overrightarrow{\sigma_{G3}(3/0)} = \overline{I_{G3}(3)} \cdot \overrightarrow{\Omega_{3/0}}$

$$\overrightarrow{\sigma_{G3}(3/0)} = \begin{pmatrix} A - m_3 \cdot d^2 & 0 & -E + m_3 \cdot e \cdot d \\ 0 & B - m_3 \cdot (e^2 + d^2) & 0 \\ -E + m_3 \cdot e \cdot d & 0 & C - m_3 \cdot e^2 \end{pmatrix}_{\mathcal{R}_1} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix}_{\mathcal{R}_1}$$

$$\overrightarrow{\sigma_{G3}(3/0)} = \begin{pmatrix} -(E - m_3 \cdot e \cdot d) \cdot \omega \\ 0 \\ (C - m_3 \cdot e^2) \cdot \omega \end{pmatrix}_{\mathcal{R}_1}$$

D'autre part : $\overrightarrow{\delta_{G3}(3/0)} = \left(\frac{d \overrightarrow{\sigma_{G3}(3/0)}}{dt} \right)_{\mathcal{R}_0} = \left(\frac{d \overrightarrow{\sigma_{G3}(3/0)}}{dt} \right)_{\mathcal{R}_1} + \overrightarrow{\Omega_{3/0}} \wedge \overrightarrow{\sigma_{G3}(3/0)}$

Ayant : $\overrightarrow{\sigma_{G3}(3/0)} = \begin{pmatrix} -(E - m_3 \cdot e \cdot d) \cdot \omega \\ 0 \\ (C - m_3 \cdot e^2) \cdot \omega \end{pmatrix}_{\mathcal{R}_1}$ Avec $\dot{\omega} = 0$ on a : $\left(\frac{d \overrightarrow{\sigma_{G3}(3/0)}}{dt} \right)_{\mathcal{R}_1} = \vec{0}$

Donc : $\overrightarrow{\delta_{G3}(3/0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix}_{\mathcal{R}_1} \wedge \begin{pmatrix} -(E - m_3 \cdot e \cdot d) \cdot \omega \\ 0 \\ (C - m_3 \cdot e^2) \cdot \omega \end{pmatrix}_{\mathcal{R}_1}$ Soit : $\overrightarrow{\delta_{G3}(3/0)} = -(E - m_3 \cdot e \cdot d) \cdot \overrightarrow{y_1}$

Enfin par le théorème de Varignon on a : $\overrightarrow{\delta_P(3/0)} = \overrightarrow{\delta_{G3}(3/0)} + \overrightarrow{PG_3} \wedge m_3 \cdot \overrightarrow{a_{G3 \in 3/0}}$

$$\overrightarrow{\delta_P(3/0)} = -(E - m_3 \cdot e \cdot d) \cdot \overrightarrow{y_1} + m_3 \cdot (-e \cdot \overrightarrow{x_1} - d \cdot \overrightarrow{z_1}) \wedge -(a - e) \cdot \omega^2 \cdot \overrightarrow{x_1}$$

$$\overrightarrow{\delta_P(3/0)} = -(E - m_3 \cdot e \cdot d) \cdot \overrightarrow{y_1} + m_3 \cdot (a \cdot d - e \cdot d) \cdot \omega^2 \cdot \overrightarrow{y_1}$$

Finalement on obtient : $\overrightarrow{\delta_P(3/0)} = -(E - m_3 \cdot a \cdot d) \cdot \omega^2 \cdot \overrightarrow{y_1}$

On isole le solide 3, Bilan des Actions Mécaniques Extérieures :

☞ Action de 1→3 due à la liaison pivot d'axe (P, $\overrightarrow{y_1}$)

☞ Action de 2→3 due à la liaison sphère plan : Force $\overrightarrow{F_{2 \rightarrow 3}} = -F_a \cdot \overrightarrow{z_1}$ appliquée en M

☞ Action de 4→3 due à la liaison sphère plan de normale (N, $\overrightarrow{x_1}$) : Force $\overrightarrow{F_{4 \rightarrow 3}} = X_{43} \cdot \overrightarrow{x_1}$ appliquée en N

L'application du TMD en P en projection sur $\overrightarrow{y_1}$ donne donc :

$$\overrightarrow{\delta_P(3/0)} \cdot \overrightarrow{y_1} = 0 + \overrightarrow{PM} \wedge \overrightarrow{F_{2 \rightarrow 3}} \cdot \overrightarrow{y_1} + \overrightarrow{PN} \wedge \overrightarrow{F_{4 \rightarrow 3}} \cdot \overrightarrow{y_1}$$

$$\begin{aligned}
 - (E - m_3.a.d).\omega^2 \cdot \vec{y}_1 \cdot \vec{y}_1 &= -b \cdot \vec{x}_1 \wedge (-F_a \cdot \vec{z}_1) \cdot \vec{y}_1 + (-f \cdot \vec{x}_1 + c \cdot \vec{z}_1) \wedge \vec{X}_{43} \cdot \vec{x}_1 \cdot \vec{y}_1 \\
 - (E - m_3.a.d).\omega^2 &= -b.F_a + c.X_{43} \quad X_{43} = \frac{b.F_a - (E - m_3.a.d).\omega^2}{c}
 \end{aligned}$$

Soit par le principe des actions mutuelles :

$$X_{34} = \frac{(E - m_3.a.d).\omega^2 - b.F_a}{c}$$

On isole le solide 4, et lui applique un théorème de la résultante dynamique. Nous allons donc calculer la résultante dynamique du solide 4 dans son mouvement par rapport à 0 : $m_4.\vec{a}_{G4 \in 4/0}$

Le mouvement de 4 par rapport à 0 est une rotation d'axe $(O, \vec{z}_1)$ donc :

$$\vec{V}_{G4 \in 4/0} = \vec{V}_{O \in 4/0} + \vec{G}_4\vec{O} \wedge \vec{\Omega}_{4/0} = \vec{0} - (r \cdot \vec{x}_1 + h \cdot \vec{z}_1) \wedge \omega \cdot \vec{z}_1 \Rightarrow \vec{V}_{G4 \in 4/0} = r.\omega \cdot \vec{y}_1$$

D'autre part per dérivation vectorielle on a :

$$\vec{a}_{G4 \in 4/0} = \left(\frac{d \vec{V}_{G4 \in 4/0}}{dt} \right)_{\mathcal{R}_0} = \left(\frac{d \vec{V}_{G4 \in 4/0}}{dt} \right)_{\mathcal{R}_1} + \vec{\Omega}_{4/0} \wedge \vec{V}_{G4 \in 4/0} \quad \text{avec : } \vec{V}_{G4 \in 4/0} = r.\omega \cdot \vec{y}_1$$

Or $\dot{\omega} = 0$. Donc : $\vec{a}_{G4 \in 4/0} = \vec{0} + \omega \cdot \vec{z}_1 \wedge r.\omega \cdot \vec{y}_1$ Soit : $m_4.\vec{a}_{G3 \in 3/0} = -m_4.r.\omega^2 \cdot \vec{x}_1$

On isole le solide 4, Bilan des Actions Mécaniques Extérieures :

- ☞ Action de 1→4 due à la liaison glissière de direction $\vec{x}_1$
- ☞ Action de 3→4 due à la liaison sphère plan : Force $\vec{F}_{3 \rightarrow 4} = X_{34} \cdot \vec{x}_1$ appliquée en N
- ☞ Action de 5→4 due à la liaison sphère plan de normale $(S, \vec{x}_1)$: Force $\vec{F}_{5 \rightarrow 4} = F_S \cdot \vec{x}_1$ appliquée en S

L'application du TRD en P en projection sur $\vec{x}_1$ donne donc :

$$m_4.\vec{a}_{G3 \in 3/0} \cdot \vec{x}_1 = 0 + \vec{F}_{3 \rightarrow 4} \cdot \vec{x}_1 + \vec{F}_{5 \rightarrow 4} \cdot \vec{x}_1 \Rightarrow -m_4.r.\omega^2 \cdot \vec{x}_1 \cdot \vec{x}_1 = X_{34} \cdot \vec{x}_1 \cdot \vec{x}_1 + F_S \cdot \vec{x}_1 \cdot \vec{x}_1$$

Soit : $F_S = -X_{34} - m_4.r.\omega^2$ et des résultats précédents : $F_S = \frac{b.F_a - (E - m_3.a.d).\omega^2}{c} - m_4.r.\omega^2$

Soit encore :

$$F_S = \frac{b}{c}.F_a - \frac{(E - m_3.a.d + m_4.r.c).\omega^2}{c}$$

5- Conclusion

Etant donné l'expression de l'effort de serrage : $F_S = \frac{b}{c}.F_a - \frac{(E - m_3.a.d + m_4.r.c).\omega^2}{c}$, pour que celui-ci augment lorsque ω augmente il faut que : $E - m_3.a.d + m_4.r.c < 0$

On en déduit qu'il faut que : $E < m_3.a.d - m_4.r.c$