

TD* : Fauteuil roulant équipé de roues "ez-Wheel" : Corrigé

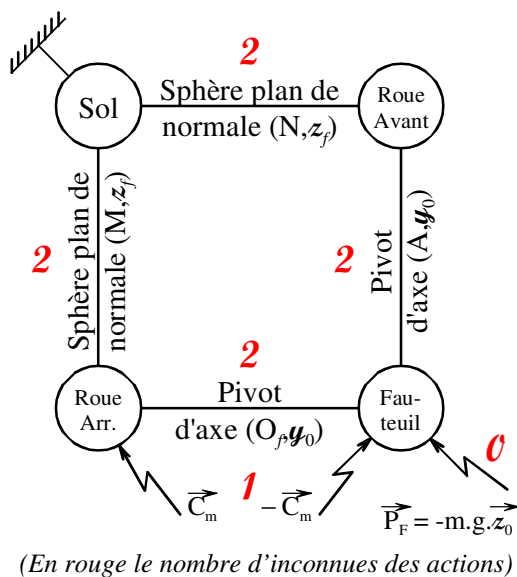
1- Expression de l'accélération

Le déplacement en deux phase est un déplacement en triangle des vitesses. La distance parcourue est égale à l'aire sous la courbe du diagramme des vitesse (Aire du triangle) On a ainsi : $d = \frac{V_M \cdot T}{2}$

D'autre part γ_1 l'accélération est la pente de la première droite de ce diagramme : $\gamma_1 = \frac{V_M}{T}$

De ces égalités on en déduit l'expression de l'accélération γ_1 en fonction de d et T : $\gamma_1 = \frac{2 \cdot d}{T^2}$

2- Graphe de structure



Du fait de la liaison pivot d'axe $(A, \vec{y}_0)$ le torseur de l'action

$$\text{au point A s'écrit : } \{T_{\text{Faut.} \rightarrow \text{R.Av.}}\} = \begin{Bmatrix} X_A & L_A \\ Y_A & 0 \\ Z_A & N_A \end{Bmatrix}_{\mathcal{R}_f}$$

$$\text{Problème plan } (A, \vec{x}_0, \vec{z}_0) : \{T_{\text{Faut.} \rightarrow \text{R.Av.}}\} = \begin{Bmatrix} X_A & 0 \\ 0 & 0 \\ Z_A & 0 \end{Bmatrix}_{\mathcal{R}_f}$$

$$\text{De même pour l'action en } O_f : \{T_{\text{Faut.} \rightarrow \text{R.Ar.}}\} = \begin{Bmatrix} X_O & 0 \\ 0 & 0 \\ Z_O & 0 \end{Bmatrix}_{\mathcal{R}_f}$$

Du fait de la liaison sphère plan de normale $(N, \vec{z}_f)$ le torseur

$$\text{au point N s'écrit : } \{T_{\text{Sol} \rightarrow \text{R.Av.}}\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ Z_N & 0 \end{Bmatrix}_{\mathcal{R}_f}$$

$$\text{Mais la liaison est non parfaite (avec frottement) donc ce torseur s'écrit : } \{T_{\text{Sol} \rightarrow \text{R.Av.}}\} = \begin{Bmatrix} X_N & 0 \\ Y_N & 0 \\ Z_N & 0 \end{Bmatrix}_{\mathcal{R}_f}$$

$$\text{Avec le problème plan } (A, \vec{x}_0, \vec{z}_0) \text{ ce torseur est donc de la forme : } \{T_{\text{Sol} \rightarrow \text{R.Av.}}\} = \begin{Bmatrix} X_N & 0 \\ 0 & 0 \\ Z_N & 0 \end{Bmatrix}_{\mathcal{R}_f}$$

$$\text{De même pour au point M : } \{T_{\text{Sol} \rightarrow \text{R.Ar.}}\} = \begin{Bmatrix} X_M & 0 \\ 0 & 0 \\ Z_M & 0 \end{Bmatrix}_{\mathcal{R}_f}$$

3- Détermination du couple moteur

Ordonnancement des isolements :

- ☞ On isole la roue avant (Système soumis à deux forces $\Leftrightarrow$ deux glisseurs) un TMD donne la direction de l'action du sol sur le roue avant $\Rightarrow$ Une seule inconnue suivant $\vec{z}_f$ pour l'action du sol sur la roue avant au point N.
- ☞ On isole l'ensemble $S = \{\text{Fauteuil} + \text{Roues avant et arrière}\}$ un TRD en projection sur $\vec{x}_f$ donne la composante suivant $\vec{x}_f$ de l'action du sol sur la roue arrière au point M.
- ☞ On isole la roue arrière un TMD en O_f donne l'expression du couple moteur C_m

On isole la roue avant, le bilan des actions mécaniques extérieures appliquées sur cette roue donne :

- ☞ Action du fauteuil sur la roue avant : Force $\vec{F}_A$ appliquée en A (Torseur d'axe passant par A)
- ☞ Action du sol sur la roue avant : Force $\vec{F}_N$ appliquée en N (Torseur d'axe passant par N)

Cette roue étant à l'équilibre (car inertie négligée), l'application du TMD (TMS) en A : $\vec{0} + \vec{AN} \wedge \vec{F}_N = \vec{0}$ montre que $\vec{AN}$ est colinéaire à $\vec{F}_N$.

Donc, le support de la force au point A (axe du glisseur $\{T_{Sol \rightarrow R.Av.}\}$) est la droite $(AN) = (N, \vec{z}_f)$.

Cette action est donc une force $\vec{F}_N = Z_N \cdot \vec{z}_f$ appliquée en N de le torseur : $\{T_{Sol \rightarrow R.Av.}\} = \begin{Bmatrix} \vec{0} & \vec{0} \\ \vec{0} & \vec{0} \\ Z_N & \vec{0} \end{Bmatrix}_{\mathcal{R}_f}$

On isole l'ensemble S = {Fauteuil + Roues avant et arrière}, le bilan des actions mécaniques :

- ☞ Action du sol sur la roue avant : Force $\vec{F}_N = Z_N \cdot \vec{z}_f$ appliquée en N
- ☞ Action du sol sur la roue Arrière : Force $\vec{F}_M = X_M \cdot \vec{x}_f + Z_M \cdot \vec{z}_f$ appliquée en M
- ☞ Action de la pesanteur sur le fauteuil : Force $\vec{P}_F = -m \cdot g \cdot \vec{z}_0$ appliquée en G

On en déduit la somme des résultantes des actions extérieures appliquées sur S projetée sur $\vec{x}_f$:

$$\Sigma \vec{F}_{Ext \rightarrow S} \cdot \vec{x}_f = \vec{F}_N \cdot \vec{x}_f + \vec{F}_M \cdot \vec{x}_f + \vec{P}_F \cdot \vec{x}_f = 0 + X_M - m \cdot g \cdot \vec{z}_0 \cdot \vec{x}_f$$

$$\Sigma \vec{F}_{Ext \rightarrow S} \cdot \vec{x}_f = X_M - m \cdot g \cdot \sin \alpha$$

L'inertie des roues étant négligée la résultante dynamique du système S projeté sur $\vec{x}_f$ est :

$$\vec{R}_D(S/0) \cdot \vec{x}_f = m \cdot \vec{a}_{G \in \text{fauteuil/Sol}} \cdot \vec{x}_f = m \cdot \gamma$$

Le théorème de la résultante dynamique projeté sur $\vec{x}_f$ ($\Sigma \vec{F}_{Ext \rightarrow S} \cdot \vec{x}_f = \vec{R}_D(S/0) \cdot \vec{x}_f$) donne donc :

$$m \cdot \gamma = X_M - m \cdot g \cdot \sin \alpha \quad \text{Soit :} \quad X_M = m \cdot (\gamma + g \cdot \sin \alpha)$$

On isole la roue arrière, le bilan des actions mécaniques extérieures appliquées sur cette roue :

- ☞ Action du sol sur la roue Arrière : Force $\vec{F}_M = X_M \cdot \vec{x}_f + Z_M \cdot \vec{z}_f$ appliquée en M
- ☞ Action du fauteuil sur la roue arrière : Force $\vec{F}_O$ appliquée en O_f (Torseur d'axe passant par O_f)
- ☞ Action du moteur : Couple de vecteur $\vec{C}_m = C_m \cdot \vec{y}_f$

On en déduit la somme des moments en O_f des actions extérieures projeté sur l'axe $\vec{y}_f$:

$$\Sigma \mathcal{M}_{O_f}(Ext \rightarrow S) \cdot \vec{y}_f = \vec{O_f M} \wedge \vec{F}_M \cdot \vec{y}_f + 0 + \vec{C}_m \cdot \vec{y}_f = -R \cdot \vec{z}_f \wedge (X_M \cdot \vec{x}_f + Z_M \cdot \vec{z}_f) \cdot \vec{y}_f + C_m \cdot \vec{y}_f \cdot \vec{y}_f$$

$$\text{Soit :} \quad \Sigma \mathcal{M}_{O_f}(Ext \rightarrow S) \cdot \vec{y}_f = -R \cdot X_M + C_m = -R \cdot m \cdot (\gamma + g \cdot \sin \alpha) + C_m$$

Cette roue étant à l'équilibre (car inertie négligée), l'application du TMD (TMS) en O_f donne :
 $-R \cdot m \cdot (\gamma + g \cdot \sin \alpha) + C_m = 0$ On en déduit finalement le couple moteur pour cette accélération γ :

$$C_m = R \cdot m \cdot (\gamma + g \cdot \sin \alpha)$$

3- Condition de non basculement du fauteuil

Le basculement du fauteuil se traduit par décollement de la roue avant. Soit par l'unique composante de l'action du sol sur la roue avant Z_N qui devient nulle. On va donc déterminer cette composante Z_N .

On reprend les résultats précédents et on isole l'ensemble S = {Fauteuil + Roues avant et arrière}.

- ☞ Action du sol sur la roue avant : Force $\vec{F}_N = Z_N \cdot \vec{z}_f$ appliquée en N
- ☞ Action du sol sur la roue Arrière : Force $\vec{F}_M = X_M \cdot \vec{x}_f + Z_M \cdot \vec{z}_f$ appliquée en M
- ☞ Action de la pesanteur sur le fauteuil : Force $\vec{P}_F = -m \cdot g \cdot \vec{z}_0$ appliquée en G

On en déduit la somme des moments en M des actions extérieures projeté sur l'axe $\vec{y}_f$:

$$\Sigma \mathcal{M}_M(Ext \rightarrow S) \cdot \vec{y}_f = \vec{MN} \wedge \vec{F}_N \cdot \vec{y}_f + 0 + \vec{MG} \wedge \vec{P}_F \cdot \vec{y}_f$$

$$\Sigma \mathcal{M}_M(Ext \rightarrow S) \cdot \vec{y}_f = (\ell + e) \cdot \vec{x}_f \wedge Z_N \cdot \vec{z}_f \cdot \vec{y}_f + (\ell \cdot \vec{x}_f + h \cdot \vec{z}_f) \wedge (-m \cdot g \cdot \vec{z}_0) \cdot \vec{y}_f$$

$$\Sigma \mathcal{M}_M(Ext \rightarrow S) \cdot \vec{y}_f = (\ell + e) \cdot Z_N \cdot \vec{x}_f \wedge \vec{z}_f \cdot \vec{y}_f - m \cdot g \cdot \vec{y}_f \wedge (\ell \cdot \vec{x}_f + h \cdot \vec{z}_f) \cdot \vec{z}_0$$

$$\Sigma \mathcal{M}_M(Ext \rightarrow S) \cdot \vec{y}_f = -(\ell + e) \cdot Z_N + m \cdot g \cdot (\ell \cdot \cos \alpha - h \cdot \sin \alpha)$$

L'inertie des roues est négligée et le fauteuil en translation. D'où le moment dynamique en G de S projeté sur l'axe $\vec{y}_f$ est nul : $\delta_{\vec{G}}(\vec{S}/0) \cdot \vec{y}_f = 0$. On a donc le moment dynamique en M :

$$\delta_{\vec{M}}(\vec{S}/0) \cdot \vec{y}_f = \vec{MG} \wedge \vec{m} \cdot \vec{a}_{\vec{G} \in \text{fauteuil}/\text{Sol}} \cdot \vec{y}_f = (\ell \cdot \vec{x}_f + h \cdot \vec{z}_f) \wedge m \cdot \gamma \cdot \vec{x}_f \cdot \vec{y}_f$$

$$\delta_{\vec{M}}(\vec{S}/0) \cdot \vec{y}_f = m \cdot h \cdot \gamma$$

D'où le théorème du moment dynamique en G projeté sur $\vec{y}_f$ ($\Sigma \mathcal{M}_{\vec{M}}(\vec{\text{Ext}} \rightarrow \vec{S}) \cdot \vec{y}_f = \delta_{\vec{M}}(\vec{S}/0) \cdot \vec{y}_f$) :

$$-(\ell + e) \cdot Z_N + m \cdot g \cdot (\ell \cdot \cos \alpha - h \cdot \sin \alpha) = m \cdot h \cdot \gamma$$

On en déduit l'unique composante de l'action du sol sur la roue avant :

$$Z_N = \frac{m \cdot [g \cdot \ell \cdot \cos \alpha - h \cdot (\gamma + g \cdot \sin \alpha)]}{\ell + e}$$

Il y a basculement du fauteuil si la roue avant perd le contact, c'est-à-dire si $Z_N \geq 0$. La condition de non basculement est donc que : $Z_N > 0$ Soit étant donné l'expression précédente :

$$g \cdot \ell \cdot \cos \alpha - h \cdot (\gamma + g \cdot \sin \alpha) > 0$$

On en déduit la condition de non basculement du fauteuil à l'accélération :

$$\gamma < \frac{g \cdot (\ell \cdot \cos \alpha - h \cdot \sin \alpha)}{h}$$