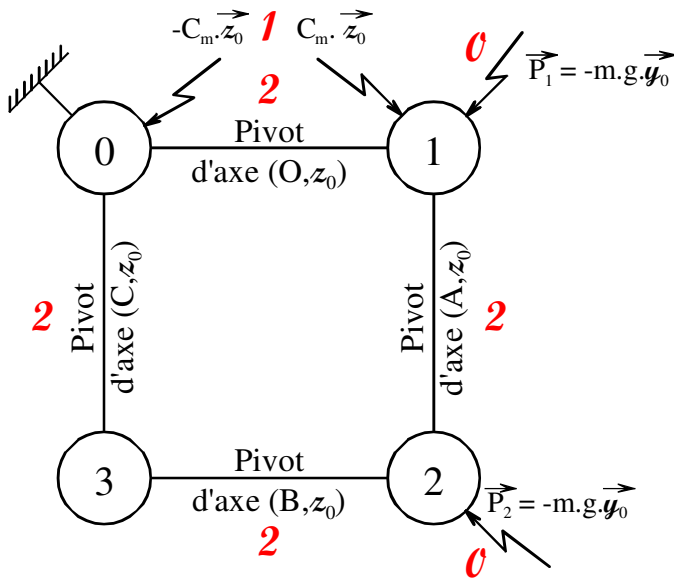


TD1 - Barrière de parking : Corrigé

1- Graphe de structure



Ayant que $OA = BC = L$ et $OC = AB = d$, le quadrilatère $OABC$ est un parallélogramme. Donc quelque soit l'angle α la droite (AB) est toujours parallèle à la droite (OC) .

A et B étant fixe sur la barre 2 et O et C étant fixes sur le bâti 0, on en déduit que le mouvement de la barre 2 par rapport à 0 est une translation.

2- Vitesse du centre d'inertie de 2 par rapport à 0

Le mouvement de 2 par rapport à 0 étant un mouvement de translation, $\vec{V}_{G2 \in 2/0} = \vec{V}_{A \in 2/0}$.

D'autre part, A étant le centre de la liaison pivot entre 1 et 2 on a $\vec{V}_{G2 \in 2/0} = \vec{V}_{A \in 2/0} = \vec{V}_{A \in 1/0}$

Par la relation de Varignon on a donc : $\vec{V}_{G2 \in 2/0} = \vec{V}_{A \in 1/0} = \vec{V}_{O \in 1/0} + \vec{\Omega}_{1/0} \wedge \vec{OA}$

Enfin O étant le centre de la liaison pivot entre 1 et 0 : $\vec{V}_{O \in 1/0} = \vec{0}$

On a donc : $\vec{V}_{G2 \in 2/0} = \vec{\Omega}_{1/0} \wedge \vec{OA} = \omega \cdot \vec{z}_1 \wedge L \cdot \vec{x}_1$ Soit : $\vec{V}_{G2 \in 2/0} = L \cdot \omega \cdot \vec{y}_1$

3- Détermination du couple moteur

Le mouvement de 2 par rapport à 0 étant une translation, l'énergie cinétique de 2 dans son mouvement par rapport à 0 est : $E_C(2/0) = \frac{1}{2} \cdot m \cdot \vec{V}_{G2 \in 2/0}^2 = \frac{1}{2} \cdot m \cdot L^2 \cdot \omega^2$.

La section de la barre 1 est constantes et petites devant L (suivant $\vec{x}_1$). Donc son moment d'inertie par rapport à l'axe $(G_1, \vec{z}_1)$ où G_1 est son centre d'inertie est : $\frac{m \cdot L^2}{12}$

Par la relation de Huygens on a donc son moment d'inertie par rapport l'axe $(O, \vec{z}_1)$ (noté $I_O(1)$) :

$$I_O(1) = \frac{m \cdot L^2}{12} + m \cdot \overline{OG_1}^2 = \frac{m \cdot L^2}{12} + m \cdot \left(\frac{L}{2}\right)^2 = \frac{m \cdot L^2}{3}$$

Le mouvement de 1 par rapport à 0 étant une rotation d'axe $(O, \vec{z}_1)$ fixe dans 0 l'énergie cinétique de 1 dans son mouvement par rapport à 0 est : $E_C(1/0) = \frac{1}{2} \cdot I_O(1) \cdot \vec{\Omega}_{1/0}^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{m \cdot L^2}{3} \cdot \omega^2$.

On choisit le système S : $S = \{1, 2, 3\}$. L'inertie de 3 étant négligée, l'énergie cinétique de S dans son mouvement par rapport à 0 est : $E_C(S/0) = E_C(1/0) + E_C(2/0) = \frac{1}{2} \cdot m \cdot L^2 \cdot \omega^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{m \cdot L^2}{3} \cdot \omega^2$

Soit finalement : $E_C(S/0) = \frac{1}{2} \cdot \frac{4 \cdot m \cdot L^2}{3} \cdot \omega^2$

Déterminons la vitesse du centre d'inertie de la barre 1 par rapport au bâti 0 :

$$\vec{V}_{G1 \in 1/0} = \vec{V}_{O \in 1/0} + \vec{\Omega}_{1/0} \wedge \vec{OG_1} = \vec{V}_{O \in 1/0} + \omega \cdot \vec{z}_0 \wedge \frac{L}{2} \cdot \vec{x}_1 = \vec{V}_{O \in 1/0} + \frac{L}{2} \cdot \omega \cdot \vec{y}_1$$

Enfin O étant le centre de la liaison pivot entre 1 et 0 : $\overrightarrow{V_{O \in 1/0}} = \vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{V_{G1 \in 1/0}} = \frac{L}{2} \cdot \omega \cdot \overrightarrow{y_1}$

On isole le système $S = \{1, 2, 3\}$ les actions mécaniques extérieures sont :

- ☞ Action de la pesanteur sur 1 : Force $\overrightarrow{P_1} = -m \cdot g \cdot \overrightarrow{y_0}$ appliquée en G_1
- ☞ Action de la pesanteur sur 2 : Force $\overrightarrow{P_2} = -m \cdot g \cdot \overrightarrow{y_0}$ appliquée en G_2
- ☞ Action du motoréducteur sur 1 : Couple de vecteur $\overrightarrow{C_m} = C_m \cdot \overrightarrow{z_0}$
- ☞ Action du bâti 0 sur 1 due à la liaison pivot parfaite d'axe $(O, \overrightarrow{z_0})$
- ☞ Action du bâti 0 sur 3 due à la liaison pivot parfaite d'axe $(C, \overrightarrow{z_0})$

Les liaisons entre 0&3 et 0&1 étant parfaites et avec le bâti 0 leurs puissances sont nulles :

$$P(0 \rightarrow 1/0) = P(0 \rightarrow 3/0) = 0$$

D'autre part étant donné les autres actions (Forces ou couple) on a les puissances :

$$P(\text{Motoréducteur} \rightarrow 1/0) = \overrightarrow{C_m} \cdot \overrightarrow{\Omega_{1/0}} = C_m \cdot \overrightarrow{z_0} \cdot \omega \cdot \overrightarrow{z_0} = C_m \cdot \omega$$

$$P(\text{Pesanteur} \rightarrow 1/0) = \overrightarrow{P_1} \cdot \overrightarrow{V_{G1 \in 1/0}} = -m \cdot g \cdot \overrightarrow{y_0} \cdot \frac{L}{2} \cdot \dot{\alpha} \cdot \overrightarrow{y_1} = -m \cdot g \cdot \frac{L}{2} \cdot \omega \cdot \cos \theta$$

$$P(\text{Pesanteur} \rightarrow 2/0) = \overrightarrow{P_2} \cdot \overrightarrow{V_{G2 \in 1/0}} = -m \cdot g \cdot \overrightarrow{y_0} \cdot L \cdot \dot{\alpha} \cdot \overrightarrow{y_1} = -m \cdot g \cdot L \cdot \omega \cdot \cos \theta$$

D'où la somme des puissances des actions extérieures s'appliquant sur S dans son mouvement par rapport à 0 : $\Sigma P(\text{Ext} \rightarrow S/0) = C_m \cdot \omega - m \cdot g \cdot \frac{L}{2} \cdot \omega \cdot \cos \theta - m \cdot g \cdot L \cdot \omega \cdot \cos \theta = C_m \cdot \omega - \frac{3 \cdot m \cdot g \cdot L}{2} \cdot \omega \cdot \cos \theta$

Le système S étant constitué de solides en liaisons parfaites les uns avec les autres sans autres actions que ces actions de liaisons. La somme des puissances des actions intérieures est nulle :

$$\Sigma P(\text{Int} \rightarrow S/0) = 0$$

L'application du Théorème de l'énergie cinétique au système S dans son mouvement par rapport au bâti 0 : $\frac{d E_C(S/0)}{dt} = \Sigma P(\text{Ext} \rightarrow S/0) + \Sigma P(\text{Int} \rightarrow S/0)$ Donne donc :

$$\frac{4 \cdot m \cdot L^2}{3} \cdot \omega \cdot \dot{\omega} = C_m \cdot \omega - \frac{3 \cdot m \cdot L}{2} \cdot g \cdot \omega \cdot \cos \theta + 0$$

En simplifiant par ω on obtient l'expression du couple moteur :

$$C_m = \frac{4 \cdot m \cdot L^2}{3} \cdot \dot{\omega} + \frac{3 \cdot m \cdot g \cdot L}{2} \cdot \cos \theta$$

3- Détermination du couple moteur pour une barrière simple

La section de la barre 1 de masse $2 \cdot m$ est constante et petites devant sa longueur $2 \cdot L$ (suivant $\overrightarrow{x_1}$). D'où son moment d'inertie par rapport l'axe $(G, \overrightarrow{z_1})$ où G est son centre d'inertie : $\frac{2 \cdot m \cdot (2 \cdot L)^2}{12} = \frac{8 \cdot m \cdot L^2}{12}$

Par la relation de Huygens on en déduit son moment d'inertie par rapport l'axe $(O, \overrightarrow{z_1})$:

$$I_{O(1)} = \frac{8 \cdot m \cdot L^2}{12} + 2 \cdot m \cdot \overline{OG}^2 = \frac{8 \cdot m \cdot L^2}{12} + 2 \cdot m \cdot L^2 = \frac{8 \cdot m \cdot L^2}{3}$$

Le mouvement de la barre 1 par rapport à 0 étant une rotation d'axe $(O, \overrightarrow{z_1})$ fixe dans 0 son énergie cinétique dans son mouvement par rapport à 0 est : $E_C(1/0) = \frac{1}{2} \cdot I_{O(1)} \cdot \overrightarrow{\Omega_{1/0}}^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{8 \cdot m \cdot L^2}{3} \cdot \omega^2$

Déterminons la vitesse du centre d'inertie de la barre 1 par rapport au bâti 0 :

$$\overrightarrow{V_{G \in 1/0}} = \overrightarrow{V_{O \in 1/0}} + \overrightarrow{\Omega_{1/0}} \wedge \overrightarrow{OG} = \overrightarrow{V_{O \in 1/0}} + \omega \cdot \overrightarrow{z_0} \wedge L \cdot \overrightarrow{x_1} = \overrightarrow{V_{O \in 1/0}} + L \cdot \omega \cdot \overrightarrow{y_1}$$

Enfin O étant le centre de la liaison pivot entre 1 et 0 : $\overrightarrow{V_{O \in 1/0}} = \vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{V_{G \in 1/0}} = L \cdot \omega \cdot \overrightarrow{y_1}$

On isole 1 les actions mécaniques extérieures sont :

- ☞ Action de la pesanteur sur 1 : Force $\overrightarrow{P} = -2 \cdot m \cdot g \cdot \overrightarrow{y_0}$ appliquée en G

☞ Action du motoréducteur sur 1 : Couple de vecteur $\vec{C}_m = C_m \cdot \vec{z}_0$

☞ Action du bâti 0 sur 1 due à la liaison pivot parfaite d'axe (O, $\vec{z}_0$)

La liaison entre 0&1 étant parfaite et avec le bâti 0 sa puissance est nulle : $P(0 \rightarrow 1/0) = 0$

D'autre part étant donné les autres actions (Forces ou couple) on a les puissances :

$$P(\text{Motoréducteur} \rightarrow 1/0) = \vec{C}_m \cdot \vec{\Omega}_{1/0} = C_m \cdot \vec{z}_0 \cdot \omega \cdot \vec{z}_0 = C_m \cdot \omega$$

$$P(\text{Pesanteur} \rightarrow 1/0) = \vec{P} \cdot \vec{V}_{G \in 1/0} = -2.m.g. \vec{y}_0 \cdot L.\dot{\alpha} \cdot \vec{y}_1 = -2.m.g.L.\omega.\cos \theta$$

D'où la somme des puissances des actions extérieures s'appliquant sur S dans son mouvement par rapport à 0 : $\Sigma P(\text{Ext} \rightarrow S/0) = C_m.\omega - 2.m.g.L.\omega.\cos \theta$

La barre 1 étant un solide, la somme des puissances des actions intérieures est nulle :

$$\Sigma P(\text{Int} \rightarrow S/0) = 0$$

L'application du Théorème de l'énergie cinétique au système S dans son mouvement par rapport au bâti 0 : $\frac{d E_C(S/0)}{dt} = \Sigma P(\text{Ext} \rightarrow S/0) + \Sigma P(\text{Int} \rightarrow S/0)$ Donne donc :

$$\frac{8.m.L^2}{3} \cdot \omega \cdot \dot{\omega} = C_m \cdot \omega - 2.m.L.g.\omega.\cos \theta + 0$$

En simplifiant par ω on obtient l'expression du couple moteur :

$$C_m = \frac{8.m.L^2}{3} \cdot \dot{\omega} + 2.m.L.g.\cos \theta$$

Comparaison des deux types de barrières

Les deux types de barrière ont la même masse totale : $2.m$ et la même longueur : $2.L$

On voit par les calculs effectué que la barrière en deux parties articulées nécessite un couple forcément plus faible que la barrière simple.

La barrière en deux parties articulées permet un encombrement en hauteur plus faible lorsqu'elle est relevée que la barrière simple.

La barrière simple n'impose par de hauteur limitée des véhicules devant la franchir lorsqu'elle est ouverte contrairement à la barrière en deux parties articulées.

La barrière en deux parties articulées est forcément plus complexe et onéreuse. On limite donc son utilisation aux parkings couverts pour lesquels la hauteur des véhicules est forcément limité. Et qui posent également une limite d'encombrement en hauteur lorsque la barrière est ouverte.