

## Manipulateur de CD : Corrigé

### Q.1- Orientation du préhenseur par rapport au bâti

Entre 2 et 4, on a un engrenage extérieur avec deux roues dentées en liaison pivot sur 3 et de rayons primitifs égaux. On a donc  $\vec{\Omega}_{4/3} = -\vec{\Omega}_{2/3}$ .

D'où par composition des vitesses :  $\vec{\Omega}_{4/0} + \vec{\Omega}_{0/3} = -\vec{\Omega}_{2/0} - \vec{\Omega}_{0/3}$

Or le mouvement de 3 par rapport à 0 est une translation donc  $\vec{\Omega}_{0/3} = \vec{0}$ .

D'où :  $\vec{\Omega}_{4/0} = -\vec{\Omega}_{2/0} = -\vec{\Omega}_{1/0} = -\dot{\alpha} \cdot \vec{z}_0$  Soit par intégration :  $(\widehat{x_0}, \widehat{x_4}) = -(\widehat{x_0}, \widehat{x_1}) + C^{te}$

Où :  $\beta = -\alpha + C^{te}$  D'autre part lorsque les barres 1 et 2 sont horizontales, toutes les bases  $\mathcal{B}_i$  sont confondues. Donc dans ce cas  $\beta = \alpha = 0$  On en déduit :  $C^{te} = 0$

**On obtient donc quelque soit la position du mécanisme :  $\beta = -\alpha$**

### Q.2- Vitesses des centres d'inertie

☞ Par la relation de Varignon :  $\vec{V}_{G_1 \in 1/0} = \vec{V}_{A \in 1/0} + \vec{\Omega}_{1/0} \wedge \overrightarrow{AG_1}$

Or A est le centre de la liaison pivot entre 1 et 0. Donc :  $\vec{V}_{A \in 1/0} = \vec{0}$

Donc :  $\vec{V}_{G_1 \in 1/0} = \vec{\Omega}_{1/0} \wedge \overrightarrow{AG_1} = \dot{\alpha} \cdot \vec{z}_0 \wedge \frac{\ell}{2} \cdot \vec{x}_1$  Soit finalement :

$$\vec{V}_{G_1 \in 1/0} = \frac{\ell}{2} \cdot \dot{\alpha} \cdot \vec{y}_1$$

☞ Par un raisonnement identique on obtient pour la barre 2 :

$$\vec{V}_{G_2 \in 2/0} = \frac{\ell}{2} \cdot \dot{\alpha} \cdot \vec{y}_2$$

☞ Le mouvement de 3 par rapport à 0 est une translation. Donc :  $\vec{V}_{G_3 \in 3/0} = \vec{V}_{C \in 3/0}$

D'autre part C est le centre de la liaison pivot entre 3 et 1. Donc :  $\vec{V}_{C \in 3/0} = \vec{V}_{C \in 1/0}$

Donc par la relation de Varignon :  $\vec{V}_{G_3 \in 3/0} = \vec{V}_{C \in 1/0} = \vec{V}_{A \in 1/0} + \vec{\Omega}_{1/0} \wedge \overrightarrow{AC}$

Or A est le centre de la liaison pivot entre 1 et 0. Donc :  $\vec{V}_{A \in 1/0} = \vec{0}$

Donc :  $\vec{V}_{G_3 \in 3/0} = \vec{\Omega}_{1/0} \wedge \overrightarrow{AC} = \dot{\alpha} \cdot \vec{z}_0 \wedge \ell \cdot \vec{x}_1$  Soit finalement :

$$\vec{V}_{G_3 \in 3/0} = \ell \cdot \dot{\alpha} \cdot \vec{y}_1$$

☞ Par la relation de Varignon :  $\vec{V}_{G_4 \in 4/0} = \vec{V}_{C \in 4/0} + \vec{\Omega}_{4/0} \wedge \overrightarrow{CG_4}$

D'autre part C est le centre de la liaison pivot entre 4 et 1. Donc :  $\vec{V}_{C \in 4/0} = \vec{V}_{C \in 1/0}$

Donc par la relation de Varignon :  $\vec{V}_{G_4 \in 4/0} = \vec{V}_{A \in 1/0} + \vec{\Omega}_{1/0} \wedge \overrightarrow{AC} + \vec{\Omega}_{4/0} \wedge \overrightarrow{CG_4}$

Or A est le centre de la liaison pivot entre 1 et 0. Donc :  $\vec{V}_{A \in 1/0} = \vec{0}$

Donc :  $\vec{V}_{G_4 \in 4/0} = \vec{\Omega}_{1/0} \wedge \overrightarrow{AC} + \vec{\Omega}_{4/0} \wedge \overrightarrow{CG_4} = \dot{\alpha} \cdot \vec{z}_0 \wedge \ell \cdot \vec{x}_1 - \dot{\alpha} \cdot \vec{z}_0 \wedge (-d \cdot \vec{y}_4)$

Soit finalement :

$$\vec{V}_{G_4 \in 4/0} = \ell \cdot \dot{\alpha} \cdot \vec{y}_1 - d \cdot \dot{\alpha} \cdot \vec{x}_4$$

### Q.3- Energie cinétique de l'ensemble des pièces en mouvement

Le système S est constitué des pièces 1 à 4, donc :  $E_C(S/0) = E_C(1/0) + E_C(2/0) + E_C(3/0) + E_C(4/0)$ .

☞ Energie cinétique de la barre 1

Calculons le moment d'inertie de la barre 1 par rapport à l'axe  $(A, \vec{z}_0)$  noté  $I_A(1)$

La distance entre  $(A, \vec{z}_0)$  et  $(G_1, \vec{z}_0)$  étant de :  $\frac{\ell}{2}$ , par le théorème de Huygens on a :

$$I_A(1) = I_{G_1}(1) + m_1 \cdot \left(\frac{\ell}{2}\right)^2 = \frac{m_1 \cdot \ell^2}{12} + \frac{m_1 \cdot \ell^2}{4} \quad \text{Soit finalement :} \quad I_A(1) = \frac{m_1 \cdot \ell^2}{3}$$

Le mouvement de 1 par rapport à 0 étant une rotation d'axe fixe  $(A, \vec{z}_0)$  à la vitesse  $\alpha$ ,

L'énergie cinétique du solide 1 par rapport à 0 est :  $E_C(1/0) = \frac{1}{2} \cdot \frac{m_1 \cdot \ell^2}{3} \cdot \dot{\alpha}^2$

☞ Energie cinétique de la barre 2. Par un raisonnement identique à la barre 1 on obtient :

$$\text{L'énergie cinétique du solide 2 par rapport à 0 est : } E_C(2/0) = \frac{1}{2} \cdot \frac{m_2 \cdot \ell^2}{3} \cdot \dot{\alpha}^2$$

☞ Energie cinétique du support de préhenseur 3.

Le mouvement de 3 par rapport à 0 est une translation,

$$\text{Donc l'énergie cinétique du solide 3 par rapport à 0 est : } E_C(3/0) = \frac{1}{2} \cdot m_3 \cdot \overrightarrow{V_{G_3 \in 3/0}}^2$$

$$\text{On a déterminé que : } \overrightarrow{V_{G_3 \in 3/0}} = \ell \cdot \dot{\alpha} \cdot \overrightarrow{y_1} \quad \text{Donc finalement : } E_C(2/0) = \frac{1}{2} \cdot m_3 \cdot \ell^2 \cdot \dot{\alpha}^2$$

☞ Energie cinétique du préhenseur 4.

Le mouvement de 4 par rapport à 0 est un mouvement plan quelconque

$$\text{Donc l'énergie cinétique de 4 par rapport à 0 est : } E_C(4/0) = \frac{1}{2} \cdot m_4 \cdot \overrightarrow{V_{G_4 \in 4/0}}^2 + \frac{1}{2} \cdot I_{G_4}(4) \cdot \overrightarrow{\Omega_{4/0}}^2$$

$$\text{On a déterminé que : } \overrightarrow{V_{G_4 \in 4/0}} = \ell \cdot \dot{\alpha} \cdot \overrightarrow{y_1} - d \cdot \dot{\alpha} \cdot \overrightarrow{x_4} \quad \text{et : } \overrightarrow{\Omega_{4/0}} = -\dot{\alpha} \cdot \overrightarrow{z_0}$$

$$\text{Donc : } E_C(4/0) = \frac{1}{2} \cdot m_4 \cdot (\ell \cdot \dot{\alpha} \cdot \overrightarrow{y_1} - d \cdot \dot{\alpha} \cdot \overrightarrow{x_4})^2 + \frac{1}{2} \cdot I_{G_4}(4) \cdot \dot{\alpha}^2$$

$$E_C(4/0) = \frac{1}{2} \cdot m_4 \cdot (\ell^2 + d^2 - 2 \cdot \ell \cdot d \cdot \overrightarrow{y_1} \cdot \overrightarrow{x_4}) \cdot \dot{\alpha}^2 + \frac{1}{2} \cdot I_{G_4}(4) \cdot \dot{\alpha}^2$$

$$\text{D'autre part : } (\overrightarrow{y_1}, \overrightarrow{x_4}) = (\overrightarrow{y_1}, \overrightarrow{x_0}) + (\overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{x_4}) = -\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) - \alpha \quad \text{Donc : } \overrightarrow{y_1} \cdot \overrightarrow{x_4} = -\sin(2\alpha)$$

Donc finalement l'énergie cinétique du préhenseur 4 par rapport à 0 est :

$$E_C(4/0) = \frac{1}{2} \cdot m_4 \cdot (\ell^2 + d^2 + 2 \cdot \ell \cdot d \cdot \sin(2\alpha)) \cdot \dot{\alpha}^2 + \frac{1}{2} \cdot I_{G_4}(4) \cdot \dot{\alpha}^2$$

☞ Energie cinétique de l'ensemble S des pièces en mouvement. Des résultats précédents on a donc :

$$E_C(S/0) = \frac{1}{2} \cdot \frac{m_1 \cdot \ell^2}{3} \cdot \dot{\alpha}^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{m_2 \cdot \ell^2}{3} \cdot \dot{\alpha}^2 + \frac{1}{2} \cdot m_3 \cdot \ell^2 \cdot \dot{\alpha}^2 + \frac{1}{2} \cdot m_4 \cdot (\ell^2 + d^2 + 2 \cdot \ell \cdot d \cdot \sin(2\alpha)) \cdot \dot{\alpha}^2 + \frac{1}{2} \cdot I_{G_4}(4) \cdot \dot{\alpha}^2$$

En ordonnant et en regroupant les termes on obtient :

$$E_C(S/0) = \frac{1}{2} \cdot \left( \frac{m_1 + m_2}{3} + m_3 + m_4 \right) \cdot \ell^2 \cdot \dot{\alpha}^2 + \frac{1}{2} \cdot (I_{G_4}(4) + m_4 \cdot d^2) \cdot \dot{\alpha}^2 + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot m_4 \cdot \ell \cdot d \cdot \sin(2\alpha) \cdot \dot{\alpha}^2$$

#### Q.4- Détermination du couple moteur par le Théorème de l'Energie Cinétique : TEC

Le système  $S = \{1,2,3,4\}$  est un ensemble de solides en liaisons parfaites sans autres actions entre les solides que les actions de liaison. Donc la somme des puissances intérieures est nulle.

$$\Sigma P(\text{Int} \rightarrow S/0) = 0$$

Les actions extérieures s'appliquant sur le système S sont :

☞ L'action du bâti 0 sur la barre 1 : Due à la liaison parfaite avec le bâti  $\Rightarrow P(0 \rightarrow 1/0) = 0$

☞ L'action du bâti 0 sur la barre 2 : Due à la liaison parfaite avec le bâti  $\Rightarrow P(0 \rightarrow 2/0) = 0$

☞ Le couple moteur appliqué sur la barre 1 :  $P(\overrightarrow{C_m} \rightarrow 1/0) = \overrightarrow{C_m} \cdot \overrightarrow{\Omega_{1/0}} = C_m \cdot \overrightarrow{z_0} \cdot \dot{\alpha} \cdot \overrightarrow{z_0} = C_m \cdot \dot{\alpha}$

☞ L'action de pesanteur s'appliquant sur chacun des solides :  $P(\text{Pes.} \rightarrow S/0) = \sum_{i=1}^4 -m_i \cdot g \cdot \overrightarrow{y_0} \cdot \overrightarrow{V_{G_i \in i/0}}$

Des résultats précédents on en déduit la somme des puissances des action extérieures :

$$\Sigma P(\text{Ext} \rightarrow S/0) = C_m \cdot \dot{\alpha} - m_1 \cdot g \cdot \overrightarrow{y_0} \cdot \frac{\ell}{2} \cdot \dot{\alpha} \cdot \overrightarrow{y_1} - m_2 \cdot g \cdot \overrightarrow{y_0} \cdot \frac{\ell}{2} \cdot \dot{\alpha} \cdot \overrightarrow{y_1} - m_1 \cdot g \cdot \overrightarrow{y_0} \cdot \ell \cdot \dot{\alpha} \cdot \overrightarrow{y_1} - m_4 \cdot g \cdot \overrightarrow{y_0} \cdot (\ell \cdot \dot{\alpha} \cdot \overrightarrow{y_1} - d \cdot \dot{\alpha} \cdot \overrightarrow{x_4})$$

$$\Sigma P(\text{Ext} \rightarrow S/0) = C_m \cdot \dot{\alpha} - m_1 \cdot g \cdot \frac{\ell}{2} \cdot \dot{\alpha} \cdot \cos \alpha - m_2 \cdot g \cdot \frac{\ell}{2} \cdot \dot{\alpha} \cdot \cos \alpha - m_1 \cdot g \cdot \ell \cdot \dot{\alpha} \cdot \cos \alpha - m_4 \cdot g \cdot (\ell \cdot \cos \alpha + d \cdot \sin \alpha) \cdot \dot{\alpha}$$

$$\text{Soit finalement : } \Sigma P(\text{Ext} \rightarrow S/0) = C_m \cdot \dot{\alpha} - \left( \frac{m_1 + m_2}{2} + m_3 + m_4 \right) \cdot g \cdot \ell \cdot \dot{\alpha} \cdot \cos \alpha - m_4 \cdot g \cdot d \cdot \dot{\alpha} \cdot \sin \alpha$$

Du résultat précédent on en déduit la dérivée de l'énergie cinétique de S :

$$\frac{d E_C(S/0)}{dt} = \left( \frac{m_1+m_2}{3} + m_3 + m_4 \right) \cdot \ell^2 \cdot \dot{\alpha} \cdot \ddot{\alpha} + \left( I_{G_4}(4) + m_4 \cdot d^2 \right) \cdot \dot{\alpha} \cdot \ddot{\alpha} + 2 \cdot m_4 \cdot \ell \cdot d \cdot \sin(2\alpha) \cdot \dot{\alpha} \cdot \ddot{\alpha} + 2 \cdot m_4 \cdot \ell \cdot d \cdot \cos(2\alpha) \cdot \dot{\alpha}^3$$

L'application du TEC :  $\frac{d E_C(S/0)}{dt} = \Sigma P(\text{Int} \rightarrow S/0) + \Sigma P(\text{Ext} \rightarrow S/0)$  donne donc :

$$\left( \frac{m_1+m_2}{3} + m_3 + m_4 \right) \cdot \ell^2 \cdot \dot{\alpha} \cdot \ddot{\alpha} + \left( I_{G_4}(4) + m_4 \cdot d^2 \right) \cdot \dot{\alpha} \cdot \ddot{\alpha} + 2 \cdot m_4 \cdot \ell \cdot d \cdot \sin(2\alpha) \cdot \dot{\alpha} \cdot \ddot{\alpha} + 2 \cdot m_4 \cdot \ell \cdot d \cdot \cos(2\alpha) \cdot \dot{\alpha}^3 =$$

$$C_m \cdot \dot{\alpha} - \left( \frac{m_1+m_2}{2} + m_3 + m_4 \right) \cdot g \cdot \ell \cdot \dot{\alpha} \cdot \cos \alpha - m_4 \cdot g \cdot d \cdot \dot{\alpha} \cdot \sin \alpha$$

Soit après simplification par  $\dot{\alpha}$  et regroupement des termes :

$$C_m = \left[ \left( \frac{m_1+m_2}{2} + m_3 + m_4 \right) \cdot \ell \cdot \cos \alpha + m_4 \cdot d \cdot \sin \alpha \right] \cdot g + 2 \cdot m_4 \cdot \ell \cdot d \cdot \cos(2\alpha) \cdot \dot{\alpha}^2 +$$

$$\left[ \left( \frac{m_1+m_2}{3} + m_3 + m_4 \right) \cdot \ell^2 + I_{G_4}(4) + m_4 \cdot d^2 + 2 \cdot m_4 \cdot \ell \cdot d \cdot \sin(2\alpha) \right] \cdot \ddot{\alpha}$$

### Q.5- Simplification pour $d = 0$

$$C_m = \left( \frac{m_1+m_2}{2} + m_3 + m_4 \right) \cdot g \cdot \ell \cdot \cos \alpha + \left[ \left( \frac{m_1+m_2}{3} + m_3 + m_4 \right) \cdot \ell^2 + I_{G_4}(4) \right] \cdot \ddot{\alpha}$$

### Q.6- Couple maximal

L'angle parcouru durant le déplacement  $\left( 90^\circ = \frac{\pi}{2} \text{ rad} \right)$  correspond à l'aire sous la courbe.

On a donc :  $\frac{\pi}{2} = \frac{3 \cdot T}{4} \cdot \dot{\alpha}_{\text{Max}}$  Soit la vitesse maximale :  $\dot{\alpha}_{\text{Max}} = \frac{2 \cdot \pi}{3 \cdot T}$

L'accélération sur la première phase est :

$$\ddot{\alpha}_1 = \frac{4 \cdot \dot{\alpha}_{\text{Max}}}{T} = \frac{8 \cdot \pi}{3 \cdot T^2}$$

L'accélération sur la deuxième phase est nulle :

$$\ddot{\alpha}_2 = 0$$

L'accélération sur la troisième phase est :

$$\ddot{\alpha}_3 = -\frac{4 \cdot \dot{\alpha}_{\text{Max}}}{T} = -\frac{8 \cdot \pi}{3 \cdot T^2}$$

D'où l'expression du couple moteur sur les trois phases :

$$\Rightarrow 1^{\text{ère}} \text{ phase : } C_m = \left( \frac{m_1+m_2}{2} + m_3 + m_4 \right) \cdot g \cdot \ell \cdot \cos \alpha + \left[ \left( \frac{m_1+m_2}{3} + m_3 + m_4 \right) \cdot \ell^2 + I_{G_4}(4) \right] \cdot \frac{8 \cdot \pi}{3 \cdot T^2}$$

$$\Rightarrow 2^{\text{ème}} \text{ phase : } C_m = \left( \frac{m_1+m_2}{2} + m_3 + m_4 \right) \cdot g \cdot \ell \cdot \cos \alpha$$

$$\Rightarrow 3^{\text{ème}} \text{ phase : } C_m = \left( \frac{m_1+m_2}{2} + m_3 + m_4 \right) \cdot g \cdot \ell \cdot \cos \alpha - \left[ \left( \frac{m_1+m_2}{3} + m_3 + m_4 \right) \cdot \ell^2 + I_{G_4}(4) \right] \cdot \frac{8 \cdot \pi}{3 \cdot T^2}$$

Le couple est donc maximal au début de la première phase ( $\alpha = 0 \Leftrightarrow \cos \alpha = 1$ ) et est :

$$C_m = \left( \frac{m_1+m_2}{2} + m_3 + m_4 \right) \cdot g \cdot \ell + \left[ \left( \frac{m_1+m_2}{3} + m_3 + m_4 \right) \cdot \ell^2 + I_{G_4}(4) \right] \cdot \frac{8 \cdot \pi}{3 \cdot T^2}$$