

Réponses temporelles des SLCI : Démonstrations

1- Réponse d'un premier ordre à une entrée en échelon

Pour un premier ordre : $H(p) = \frac{K}{1 + \tau.p}$ Pour une entrée en échelon d'amplitude E_0 : $E(p) = \frac{E_0}{p}$

D'où la réponse à un échelon d'amplitude E_0 : $S(p) = \frac{K.E_0}{p.(1 + \tau.p)} = \frac{A}{p} + \frac{B}{1 + \tau.p} = \frac{A + (B + A.\tau).p}{p.(1 + \tau.p)}$

Par identification on en déduit : $A = K.E_0$ et : $B + A.\tau = 0$ Soit : $B = -K.E_0.\tau$

Par conséquent la réponse dans le domaine de Laplace est : $S(p) = \frac{K.E_0}{p} - \frac{K.E_0.\tau}{p + 1/\tau}$

Or on a les transformée de Laplace : $\mathcal{L}[1] = \frac{1}{p}$ et : $\mathcal{L}[e^{-a.t}] = \frac{1}{p + a}$

D'où la réponse temporelle : $s(t) = K.E_0 - K.E_0.\tau.e^{-t/\tau}$ Soit encore : $s(t) = K.E_0.(1 - e^{-t/\tau})$

Par dérivation temporelle on obtient donc : $s'(t) = \frac{K.E_0}{\tau}.e^{-t/\tau}$ Donc : $s'(0) = \frac{K.E_0}{\tau}$

2- Réponse d'un premier ordre à une entrée en rampe

Pour un premier ordre : $H(p) = \frac{K}{1 + \tau.p}$ Pour une entrée en rampe de pente a : $E(p) = \frac{a}{p^2}$

D'où la réponse à un échelon d'amplitude E_0 : $S(p) = \frac{K.a}{p^2.(1 + \tau.p)}$

$S(p) = \frac{A}{p} + \frac{B}{p^2} + \frac{C}{1 + \tau.p} = \frac{(A.\tau + C)p^2 + (A + B.\tau).p + B}{p^2.(1 + \tau.p)}$

Par identification on en déduit : $\begin{cases} A.\tau + C = 0 \\ A + B.\tau = 0 \\ B = K.a \end{cases}$ Soit : $\begin{cases} A = -K.a.\tau \\ B = K.a \\ C = K.a.\tau^2 \end{cases}$

Par conséquent la réponse dans le domaine de Laplace est : $S(p) = \frac{-K.a.\tau}{p} + \frac{K.a}{p^2} + \frac{K.a.\tau^2}{1 + \tau.p}$

$S(p) = \frac{K.a}{p^2} - K.a.\tau.\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p + 1/\tau}\right)$

Or on a les transformée de Laplace : $\mathcal{L}[1] = \frac{1}{p}$ $\mathcal{L}[t] = \frac{1}{p^2}$ et : $\mathcal{L}[e^{-a.t}] = \frac{1}{p + a}$

D'où la réponse temporelle : $s(t) = K.a.t - K.a.\tau.(1 - e^{-t/\tau})$

Par dérivation temporelle on obtient donc : $s'(t) = K.a.(1 - e^{-t/\tau})$ Donc : $s'(0) = 0$

Valeur à l'infini :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} s(t) = K.a.t - K.a.\tau$$

$$\text{Soit : } \lim_{t \rightarrow \infty} s(t) = K.a.(t - \tau)$$

On a donc une asymptote d'équation : $K.a.(t - \tau)$

Si $K = 1$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (K.e(t) - s(t)) = K.a.\tau - K.a.(t - \tau) = K.a.\tau$$

On en déduit l'erreur de trainage sur la rampe $K.a.t$: $\epsilon_t = a.\tau$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (K.e(t - \tau) - s(t)) = K.a.(t - \tau) - K.a.(t - \tau) = 0$$

Donc la réponse a un retard τ sur la rampe $K.a.t$.

2- Réponse d'un second ordre à une entrée en échelon

Pour un second ordre : $H(p) = \frac{K}{1 + \frac{2\xi}{\omega_0}p + \frac{1}{\omega_0^2}p^2}$ Et une entrée en échelon d'amplitude E_0 : $E(p) = \frac{E_0}{p}$

D'où la réponse à cet échelon : $S(p) = \frac{K.E_0}{p \left(1 + \frac{2\xi}{\omega_0}p + \frac{1}{\omega_0^2}p^2 \right)} = \frac{K.E_0.\omega_0^2}{p.(p^2 + 2\xi.\omega_0.p + \omega_0^2)}$

On pose p_1 et p_2 les solutions de l'équation : $p^2 + 2\xi.\omega_0.p + \omega_0^2 = 0$ $\Delta = 4.\omega_0^2.(\xi^2 - 1)$

On a alors : $S(p) = \frac{K.E_0.\omega_0^2}{p.(p - p_1).(p - p_2)} = \frac{A}{p} + \frac{B}{p - p_1} + \frac{C}{p - p_2}$

Soit encore : $S(p) = \frac{A.p^2 - A.(p_1 + p_2).p + A.p_1.p_2 + B.p^2 - B.p.p_2 + C.p^2 - C.p.p_1}{p.(p - p_1).(p - p_2)}$

Par identification on en déduit :
$$\begin{cases} A.p_1.p_2 = K.E_0.\omega_0^2 \\ A.(p_1 + p_2) + B.p_2 + C.p_1 = 0 \\ A + B + C = 0 \end{cases} \quad \text{Soit : } \begin{cases} A = \frac{K.E_0.\omega_0^2}{p_1.p_2} \\ B = \frac{K.E_0.\omega_0^2}{p_1.(p_1 - p_2)} \\ C = \frac{K.E_0.\omega_0^2}{p_2.(p_2 - p_1)} \end{cases}$$

Par conséquent la réponse dans le domaine de Laplace est :

$$S(p) = \frac{K.E_0.\omega_0^2}{p.p_1.p_2} + \frac{K.E_0.\omega_0^2}{p_1.(p_1 - p_2).(p - p_1)} + \frac{K.E_0.\omega_0^2}{p_2.(p_2 - p_1).(p - p_2)}$$

Si $\xi < 1$ $\Delta = 4.\omega_0^2.(\xi^2 - 1) < 0$

On alors deux solutions complexes : $p_1 = -\omega_0.(\xi + i.\sqrt{1 - \xi^2})$ et : $p_2 = -\omega_0.(\xi - i.\sqrt{1 - \xi^2})$

On en déduit : $p_1.p_2 = \omega_0^2$ et : $p_1 + p_2 = -2\xi.\omega_0$

De l'expression précédente en réduisant 2 termes au même dénominateur on obtient la réponse :

$$\begin{aligned} S(p) &= \frac{K.E_0}{p} + \frac{K.E_0.\omega_0^2.p_2.(p - p_2) - K.E_0.\omega_0^2.p_1.(p - p_1)}{p_1.p_2.(p_1 - p_2).(p - p_1).(p - p_2)} \\ S(p) &= \frac{K.E_0}{p} + \frac{K.E_0.\omega_0^2.(p_2.p - p_2^2 + p_1^2 - p_1.p)}{p_1.p_2.(p_1 - p_2).(p - p_1).(p - p_2)} = \frac{K.E_0}{p} - \frac{K.E_0.[p.(p_1 - p_2) + p_2^2 - p_1^2]}{(p_1 - p_2).(p^2 - p.(p_1 + p_2) + p_1.p_2)} \\ S(p) &= \frac{K.E_0}{p} - \frac{K.E_0.(p_1 - p_2).(p - (p_1 + p_2))}{(p_1 - p_2).(p^2 - p.(p_1 + p_2) + p_1.p_2)} = \frac{K.E_0}{p} - \frac{K.E_0.(p - (p_1 + p_2))}{p^2 - p.(p_1 + p_2) + p_1.p_2} \\ S(p) &= \frac{K.E_0}{p} - \frac{K.E_0.(p - (p_1 + p_2))}{p^2 - p.(p_1 + p_2) + p_1.p_2} \end{aligned}$$

Sachant que l'on a : $p_1.p_2 = \omega_0^2$ et : $p_1 + p_2 = -2\xi.\omega_0$ On obtient :

$$S(p) = \frac{K.E_0}{p} - \frac{K.E_0.(p + 2\xi.\omega_0)}{p^2 + 2\xi.\omega_0.p + \omega_0^2} = \frac{K.E_0}{p} - \frac{K.E_0.(p + \xi.\omega_0)}{(p + \xi.\omega_0)^2 - \xi^2.\omega_0^2 + \omega_0^2} - \frac{K.E_0.\xi.\omega_0}{(p + \xi.\omega_0)^2 - \xi^2.\omega_0^2 + \omega_0^2}$$

On en déduit finalement la réponse symbolique :

$$S(p) = \frac{K.E_0}{p} - \frac{K.E_0.(p + \xi.\omega_0)}{(p + \xi.\omega_0)^2 + (\omega_0.\sqrt{1 - \xi^2})^2} - \frac{K.E_0.\xi.\omega_0.\sqrt{1 - \xi^2}}{\sqrt{1 - \xi^2}.[(p + \xi.\omega_0)^2 + (\omega_0.\sqrt{1 - \xi^2})^2]}$$

Or on a : $\mathcal{L}[1] = \frac{1}{p}$ $\mathcal{L}[e^{-a.t}.cos(\omega.t)] = \frac{p + a}{(p + a)^2 + \omega^2}$ et : $\mathcal{L}[e^{-a.t}.sin(\omega.t)] = \frac{\omega}{(p + a)^2 + \omega^2}$

D'où en posant : $\omega = \omega_0.\sqrt{1 - \xi^2}$ on peut écrire la réponse temporelle sous la forme :

$$s(t) = K.E_0 \left[1 - e^{-\xi.\omega_0.t} . cos(\omega.t) - \frac{e^{-\xi.\omega_0.t}}{\sqrt{1 - \xi^2}} . \xi . sin(\omega.t) \right]$$

$$s(t) = K.E_0 \cdot \left[1 - \frac{e^{-\xi \cdot \omega_0 \cdot t}}{\sqrt{1-\xi^2}} \cdot [\sqrt{1-\xi^2} \cdot \cos(\omega \cdot t) + \xi \cdot \sin(\omega \cdot t)] \right]$$

D'où en posant φ tel que : $\xi = \cos \varphi$ $\sqrt{1-\xi^2} = \sin \varphi$ la réponse temporelle devient :

$$s(t) = K.E_0 \cdot \left[1 - \frac{e^{-\xi \cdot \omega_0 \cdot t}}{\sqrt{1-\xi^2}} \cdot [\sin \varphi \cdot \cos(\omega \cdot t) + \cos \varphi \cdot \sin(\omega \cdot t)] \right]$$

$$s(t) = K.E_0 \cdot \left[1 - \frac{e^{-\xi \cdot \omega_0 \cdot t}}{\sqrt{1-\xi^2}} \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi) \right] \quad \text{avec :} \quad \left| \begin{array}{l} \omega = \omega_0 \cdot \sqrt{1-\xi^2} \\ \varphi = \arccos \xi \end{array} \right.$$

Par dérivation temporelle on obtient donc :

$$s'(t) = K.E_0 \cdot \frac{\xi \cdot \omega_0 \cdot e^{-\xi \cdot \omega_0 \cdot t}}{\sqrt{1-\xi^2}} \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi) - \frac{\omega \cdot e^{-\xi \cdot \omega_0 \cdot t}}{\sqrt{1-\xi^2}} \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi)$$

$$s'(t) = \frac{K.E_0 \cdot \omega_0}{\sqrt{1-\xi^2}} \cdot e^{-\xi \cdot \omega_0 \cdot t} \cdot [\xi \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi) - \sqrt{1-\xi^2} \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi)]$$

$$s'(t) = \frac{K.E_0 \cdot \omega_0}{\sqrt{1-\xi^2}} \cdot e^{-\xi \cdot \omega_0 \cdot t} \cdot [\cos \varphi \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi) - \sin \varphi \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi)]$$

On obtient donc : $s'(t) = \frac{K.E_0 \cdot \omega_0}{\sqrt{1-\xi^2}} \cdot e^{-\xi \cdot \omega_0 \cdot t} \cdot \sin(\omega \cdot t)$ Donc : $s'(0) = 0$

Extrémums de cette fonction

Ces maximums sont aux dates : $t_n = \frac{n \cdot \pi}{\omega}$ et on pour valeurs : $s(t_n) = K.E_0 \cdot \left[1 - \frac{e^{-\xi \cdot \omega_0 \cdot t}}{\sqrt{1-\xi^2}} \cdot \sin(n \cdot \pi + \varphi) \right]$

Donc : $s(t_n) - S_\infty = K.E_0 \cdot \left[1 \pm \frac{e^{-\xi \cdot \omega_0 \cdot n \cdot \pi}}{\sqrt{1-\xi^2}} \cdot \sin \varphi \right] - K.E_0 = \pm K.E_0 \cdot e^{-\xi \cdot \omega_0 \cdot n \cdot \pi} \cdot \frac{\sin \varphi}{\sqrt{1-\xi^2}}$

$$\frac{|s(t_n) - S_\infty|}{S_\infty} = e^{-\xi \cdot \omega_0 \cdot n \cdot \pi} \cdot \frac{\sin \varphi}{\sqrt{1-\xi^2}}$$

Si $\xi > 1$ $\Delta = 4 \cdot \omega_0^2 \cdot (\xi^2 - 1) > 0$

On alors deux solutions réelles : $p_1 = -\omega_0 \cdot (\xi + \sqrt{\xi^2 - 1})$ et : $p_2 = -\omega_0 \cdot (\xi - \sqrt{\xi^2 - 1})$

On en déduit : $p_1 \cdot p_2 = \omega_0^2$ $p_1 - p_2 = -2 \cdot \omega_0 \cdot \sqrt{\xi^2 - 1}$

Or réponse symbolique est : $S(p) = \frac{K.E_0 \cdot \omega_0^2}{p \cdot p_1 \cdot p_2} + \frac{K.E_0 \cdot \omega_0^2}{p_1 \cdot (p_1 - p_2) \cdot (p - p_1)} + \frac{K.E_0 \cdot \omega_0^2}{p_2 \cdot (p_2 - p_1) \cdot (p - p_2)}$ Donc :

$$S(p) = \frac{K.E_0}{p} + \frac{K.E_0}{2 \cdot \sqrt{\xi^2 - 1} \cdot (\xi + \sqrt{\xi^2 - 1}) \cdot (p - p_1)} - \frac{K.E_0}{2 \cdot \sqrt{\xi^2 - 1} \cdot (\xi - \sqrt{\xi^2 - 1}) \cdot (p - p_2)}$$

$$S(p) = \frac{K.E_0}{p} - \frac{K.E_0}{2 \cdot \sqrt{\xi^2 - 1}} \cdot \left[\frac{1}{(\xi - \sqrt{\xi^2 - 1}) \cdot (p - p_2)} - \frac{1}{(\xi + \sqrt{\xi^2 - 1}) \cdot (p - p_1)} \right]$$

Or on a les transformée de Laplace : $\mathcal{L}[1] = \frac{1}{p}$ et : $\mathcal{L}[e^{-a \cdot t}] = \frac{1}{p + a}$

D'où : $s(t) = K.E_0 \cdot \left[1 - \frac{1}{2 \cdot \sqrt{\xi^2 - 1}} \cdot \left[\frac{e^{-\omega_0 \cdot (\xi - \sqrt{\xi^2 - 1}) \cdot t}}{\xi - \sqrt{\xi^2 - 1}} - \frac{e^{-\omega_0 \cdot (\xi + \sqrt{\xi^2 - 1}) \cdot t}}{\xi + \sqrt{\xi^2 - 1}} \right] \right]$

Et : $s'(t) = \frac{K.E_0 \cdot \omega_0}{2 \cdot \sqrt{\xi^2 - 1}} \cdot \left(e^{-\omega_0 \cdot (\xi + \sqrt{\xi^2 - 1}) \cdot t} - e^{-\omega_0 \cdot (\xi - \sqrt{\xi^2 - 1}) \cdot t} \right)$ Donc : $s'(0) = 0$

Décomposition de la fonction de transfert en deux premiers ordres

$$\text{Si } \xi > 1 : \quad H(p) = \frac{K}{(1 + T_1 p)(1 + T_2 p)} = \frac{K}{1 + (T_1 + T_2)p + T_1 T_2 p^2} = \frac{K}{1 + \frac{2\xi}{\omega_0} p + \frac{1}{\omega_0^2} p^2}$$

$$\text{On en déduit : } \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{T_1 T_2}} \quad \text{et : } \xi = \frac{T_1 + T_2}{2\sqrt{T_1 T_2}} \Rightarrow \sqrt{\xi^2 - 1} = \sqrt{\frac{(T_1 + T_2)^2}{4 T_1 T_2} - 1}$$

$$\text{Soit : } \sqrt{\xi^2 - 1} = \frac{T_1 - T_2}{2\sqrt{T_1 T_2}} \quad \text{et : } \xi - \sqrt{\xi^2 - 1} = \sqrt{\frac{T_2}{T_1}} \quad \xi + \sqrt{\xi^2 - 1} = \sqrt{\frac{T_1}{T_2}}$$

$$\text{Et également : } -\omega_0(\xi - \sqrt{\xi^2 - 1}) = -\frac{1}{T_1} \quad \text{et : } -\omega_0(\xi + \sqrt{\xi^2 - 1}) = -\frac{1}{T_2}$$

$$\text{Sachant que : } s(t) = K.E_0 \left[1 - \frac{1}{2\sqrt{\xi^2 - 1}} \left[\frac{e^{-\omega_0(\xi - \sqrt{\xi^2 - 1})t}}{\xi - \sqrt{\xi^2 - 1}} - \frac{e^{-\omega_0(\xi + \sqrt{\xi^2 - 1})t}}{\xi + \sqrt{\xi^2 - 1}} \right] \right]$$

$$\Rightarrow s(t) = K.E_0 \left[1 - \frac{\sqrt{T_1 T_2}}{T_1 - T_2} \left(\sqrt{\frac{T_1}{T_2}} e^{-t/T_1} - \sqrt{\frac{T_2}{T_1}} e^{-t/T_2} \right) \right] = K.E_0 \left[1 - \frac{T_1 e^{-t/T_1} - T_2 e^{-t/T_2}}{T_1 - T_2} \right]$$

$$\Rightarrow s(T_1 + T_2) = K.E_0 \left[1 - \frac{T_1 e^{-1} e^{-T_2/T_1} - T_2 e^{-1} e^{-T_1/T_2}}{T_1 - T_2} \right] = K.E_0 \left[1 - e^{-1} \frac{e^{-(T_2/T_1)} - (T_2/T_1) e^{-(1/(T_2/T_1))}}{1 - (T_2/T_1)} \right]$$

$$\Rightarrow s(2.T_1 + T_2) = K.E_0 \left[1 - \frac{T_1 e^{-2} e^{-T_2/T_1} - T_2 e^{-2} e^{-2.T_1/T_2}}{T_1 - T_2} \right] = K.E_0 \left[1 - e^{-2} \frac{e^{-(T_2/T_1)} - (T_2/T_1) e^{-(2/(T_2/T_1))}}{1 - (T_2/T_1)} \right]$$

$$\text{On a donc : } s(T_1 + T_2) \approx K.E_0.(1 - e^{-1}.f_1((T_2/T_1))) \quad s(2.T_1 + T_2) \approx K.E_0.(1 - e^{-2}.f_2((T_2/T_1)))$$

$$\text{L'étude des fonctions } f_1 \text{ et } f_2 \text{ montre que pour : } T_2/T_1 \leq 0,5 \quad (T_1 \geq 2.T_2) \quad \begin{aligned} f_1((T_2/T_1)) &\in [1; 1,08] \\ f_2((T_2/T_1)) &\in [1; 1,17] \end{aligned}$$

$$\text{Finalement pour } T_1 \geq 2.T_2 : \quad s(T_1 + T_2) \approx K.E_0.(1 - e^{-1}) = 0,63.K.E_0 \quad (\text{à } 3\% \text{ de } K.E_0)$$

$$\text{et : } s(2.T_1 + T_2) \approx K.E_0.(1 - e^{-2}) = 0,86.K.E_0 \quad (\text{à } 2\% \text{ de } K.E_0)$$

3- Réponse d'un premier ordre généralisé à une entrée en échelon

$$\text{Pour un 1}^{\text{ier}} \text{ ordre généralisé : } H(p) = \frac{K.(1 + c.\tau.p)}{1 + \tau.p} \quad \text{Pour l'entrée en échelon } E_0 : \quad E(p) = \frac{E_0}{p}$$

$$\text{D'où la réponse à l'échelon } E_0 : \quad S(p) = \frac{K.E_0.(1 + c.\tau.p)}{p.(1 + \tau.p)} = \frac{A}{p} + \frac{B}{1 + \tau.p} = \frac{A + (B + A.\tau).p}{p.(1 + \tau.p)}$$

$$\text{Par identification on en déduit : } A = K.E_0 \quad \text{et : } B + A.\tau = K.E_0.c.\tau \quad \text{Soit : } B = -K.E_0.\tau.(1 - c)$$

$$\text{Par conséquent la réponse dans le domaine de Laplace est : } S(p) = \frac{K.E_0}{p} - \frac{K.E_0.(1 - c)}{p + 1/\tau}$$

$$\text{Or on a les transformée de Laplace : } \mathcal{L}[1] = \frac{1}{p} \quad \text{et : } \mathcal{L}[e^{-a.t}] = \frac{1}{p + a}$$

$$\text{D'où la réponse temporelle : } s(t) = K.E_0 - K.E_0.(1 - c).e^{-t/\tau}$$

$$\text{Soit encore : } s(t) = K.E_0.(1 - (1 - c).e^{-t/\tau})$$

$$\text{On a donc : } S(0) = K.E_0.c$$

$$\text{et : } \lim_{t \rightarrow \infty} s(t) = K.E_0$$