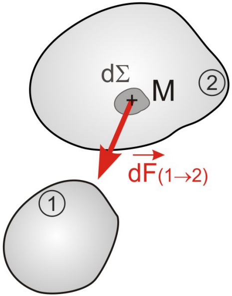
Statique des Systèmes Mécaniques

Spé MP-MP* 2025-2026

Lycée Thiers Marseille

Localement en M :

$$\{d\mathcal{T}\}=\left\{\begin{array}{c}\overrightarrow{dF}(1\rightarrow 2)\\ \overrightarrow{0}\end{array}\right\}_M$$



Modèle local au point O quelconque

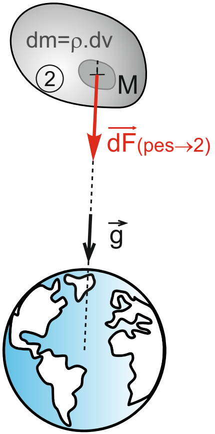
$$\left\{d\mathcal{T}_{(1\rightarrow 2)}\right\}=\left\{\begin{array}{c}\overrightarrow{dF}(1\rightarrow 2)\\ \overrightarrow{OM}\wedge\overrightarrow{dF}(1\rightarrow 2)\end{array}\right\}_O$$

Avec $\overrightarrow{dF}(1\rightarrow 2)=\overrightarrow{f_M}(1\rightarrow 2)d\Sigma$

- $\overrightarrow{f_M}(1\rightarrow 2)$ densité surfacique (N/m^2) ou volumique (N/m^3) d'effort au voisinage de M,
- $d\Sigma$ élément surfacique ou volumique.

Modèle global au point O quelconque

$$\left\{\mathcal{T}_{(1\rightarrow 2)}\right\}=\left\{\begin{array}{c}\overrightarrow{R}_{(1\rightarrow 2)}=\int_{M\in\Sigma}\overrightarrow{dF}(1\rightarrow 2)\\ \overrightarrow{M}_{O(1\rightarrow 2)}=\int_{M\in\Sigma}\overrightarrow{OM}\wedge\overrightarrow{dF}(1\rightarrow 2)\end{array}\right\}_O$$



Chaque élément dv de masse élémentaire dm est soumis à :

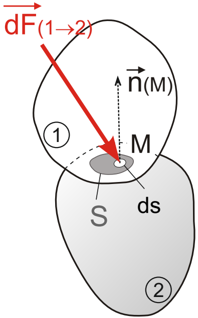
$$\overrightarrow{dF}(pes \rightarrow 2) = \vec{g}.dm = \vec{g}.\rho.dv$$

Torseur d'action mécanique de la pesanteur en G :

$$\left\{\mathcal{T}(pes \rightarrow 2)\right\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{P_2} = m_2.\vec{g} \\ \overrightarrow{M}_{G,(\vec{P_2})} = \vec{0} \end{array} \right\}_G$$

Centre d'inertie

$$\int_{M \in 2} \overrightarrow{GM}.dm = \vec{0} \qquad \text{ou} \qquad \overrightarrow{OG} = \frac{1}{m_2} \int_{M \in 2} \overrightarrow{OM}.dm$$



Chaque élément ds de la surface de contact S est soumis à :

$$\overrightarrow{dF}(1 \rightarrow 2) = \overrightarrow{f_M}(1 \rightarrow 2).ds$$

Torseur d'action mécanique surfacique de contact en O :

$$\left\{\mathcal{T}_{(1\rightarrow 2)}\right\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{R}_{(1\rightarrow 2)} = \displaystyle\int_{M\in S} \overrightarrow{f_M}(1 \rightarrow 2).ds \\ \overrightarrow{M}_{O(1\rightarrow 2)} = \displaystyle\int_{M\in S} \overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{f_M}(1 \rightarrow 2).ds \end{array} \right\}_O$$

Dans le cas d'un contact sans frottement :

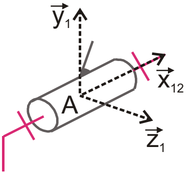
$$\overrightarrow{f_M}(1 \rightarrow 2) = -p(M).\vec{n}(M)$$

- $p(M)$: pression de contact en M (N/m^2),
- $\vec{n}(M)$: vecteur unitaire normal au plan tangent commun en M, **orienté vers l'extérieur**.

Liaisons mécaniques parfaites au sens énergétique :

Les torseurs des actions mécaniques transmissibles et cinématique d'une liaison entre S_1 et S_2 **PARFAITE** (sans frottement) sont duaux, la puissance des actions mutuelles entre les 2 solides est nulle :

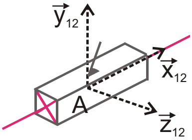
$$\mathcal{P}_{(1\leftrightarrow 2)} = \left\{\mathcal{V}_{2/1}\right\} \otimes \left\{\mathcal{T}_{(1\rightarrow 2)}\right\} = \overrightarrow{\Omega}_{2/1} \cdot \overrightarrow{M}_{A,(1\rightarrow 2)} + \overrightarrow{R}_{(1\rightarrow 2)} \cdot \overrightarrow{V}_{(A,2/1)} = 0$$



Pivot d'axe (A,$\vec{x}_{12}$)

$$\left\{\mathcal{T}(1 \rightarrow 2)\right\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{R}_{(1\rightarrow 2)} \\ \overrightarrow{M}_{M,(1\rightarrow 2)} \end{array} \right\}_{\forall M \in (A,\vec{x}_{12})} \quad \text{avec } \overrightarrow{M}_{M,(1\rightarrow 2)} \cdot \vec{x}_{12} = 0$$

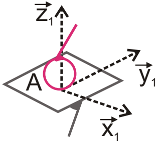
5 inconnues statiques



Glissière de direction $\vec{x}_{12}$

$$\left\{\mathcal{T}(1 \rightarrow 2)\right\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{R}_{(1\rightarrow 2)} \\ \overrightarrow{M}_{M,(1\rightarrow 2)} \end{array} \right\}_{\forall M} \quad \text{avec } \overrightarrow{R}_{(1\rightarrow 2)} \cdot \vec{x}_{12} = 0$$

5 inconnues statiques



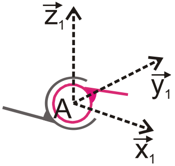
Sphère plan (ponctuelle) de normale $\vec{z}_1$ de contact A

$$\left\{\mathcal{T}(1 \rightarrow 2)\right\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{R}_{(1\rightarrow 2)} = Z_{12}.\vec{z}_1 \\ \overrightarrow{0} \end{array} \right\}_{\forall M \in (A,\vec{z}_1)}$$

1 inconnue statique

2.2 Torseurs des actions mécaniques transmissibles

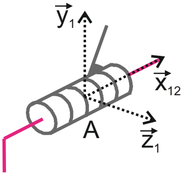
Liaisons parfaites (sans frottement)



Sphérique (rotule) de centre A

$$\left\{\mathcal{T}(1 \rightarrow 2)\right\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{R}_{(1\rightarrow 2)} \\ \overrightarrow{0} \end{array} \right\}_A$$

3 inconnues statiques

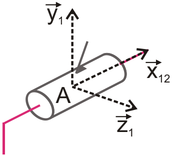


Hélicoïdale d'axe (A,$\vec{x}_{12}$) (hélice à droite, pas p)

$$\left\{\mathcal{T}(1 \rightarrow 2)\right\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{R}_{(1\rightarrow 2)} \\ \overrightarrow{M}_{M,(1\rightarrow 2)} \end{array} \right\}_{\forall M \in (A, \vec{x}_{12})} \quad \text{avec } L_{12} = -\frac{p}{2\pi}.X_{12}$$

$X_{12} = \overrightarrow{R}_{(1\rightarrow 2)} \cdot \vec{x}_{12}$, $L_{12} = \overrightarrow{M}_{M,(1\rightarrow 2)} \cdot \vec{x}_{12}$

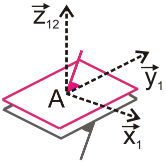
5 inconnues statiques



Pivot glissant d'axe (A,$\vec{x}_{12}$)

$$\left\{\mathcal{T}(1 \rightarrow 2)\right\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{R}_{(1\rightarrow 2)} \\ \overrightarrow{M}_{M,(1\rightarrow 2)} \end{array} \right\}_{\forall M \in (A, \vec{x}_{12})} , \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{R}_{(1\rightarrow 2)} \cdot \vec{x}_{12} = 0 \\ \overrightarrow{M}_{M,(1\rightarrow 2)} \cdot \vec{x}_{12} = 0 \end{array} \right.$$

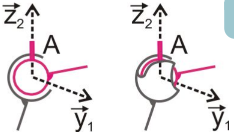
4 inconnues statiques



Appui plan de normale $\vec{z}_{12}$

$$\left\{\mathcal{T}(1\rightarrow 2)\right\} = \left\{\begin{array}{c} \overrightarrow{R}_{(1\rightarrow 2)} = Z_{12}.\vec{z}_{12} \\ \overrightarrow{M}_{M,(1\rightarrow 2)} \end{array}\right\}_{\forall M} , \overrightarrow{M}_{M,(1\rightarrow 2)}\cdot\vec{z}_{12} = 0$$

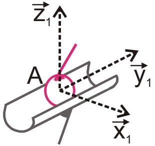
3 inconnues statiques



Sphérique à doigt de centre A d'axe (A,$\vec{z}_2$), de normale $\vec{y}_1$

$$\left\{\mathcal{T}(1\rightarrow 2)\right\} = \left\{\begin{array}{c} \overrightarrow{R}_{(1\rightarrow 2)} \\ \overrightarrow{M}_{A,(1\rightarrow 2)} \end{array}\right\}_{A} \text{ avec } \left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{M}_{A,(1\rightarrow 2)}\cdot\vec{y}_1 = 0 \\ \overrightarrow{M}_{A,(1\rightarrow 2)}\cdot\vec{z}_2 = 0 \end{array}\right.$$

4 inconnues statiques



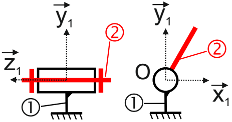
Sphère cylindre de centre A et de direction $\vec{y}_1$

$$\left\{\mathcal{T}(1\rightarrow 2)\right\} = \left\{\begin{array}{c} \overrightarrow{R}_{(1\rightarrow 2)} \\ \overrightarrow{0} \end{array}\right\}_{A} \text{ avec } \overrightarrow{R}_{(1\rightarrow 2)}\cdot\vec{y}_1 = 0$$

2 inconnues statiques

3 - Liaisons planes

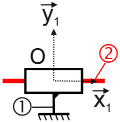
Plan $(O, \vec{x}_1, \vec{y}_1)$



Pivot d'axe $(O, \vec{z}_{12})$

$$\left\{\mathcal{T}(1 \rightarrow 2)\right\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{R}_{(1\rightarrow 2)} \\ \overrightarrow{0} \end{array} \right\}_O$$

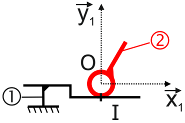
2 inconnues statiques



Glissière de direction $\vec{x}_{12}$

$$\left\{\mathcal{T}(1 \rightarrow 2)\right\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{R}_{(1\rightarrow 2)} = Y_{12}.\vec{y}_{12} \\ \overrightarrow{M}_{M,(1\rightarrow 2)} = N_{12}.\vec{z}_{12} \end{array} \right\}_{\forall M \in (O, \vec{x}_1, \vec{y}_1)}$$

2 inconnues statiques



Sphère plan (ponctuelle) de normale $\vec{y}_1$ de contact I

$$\left\{\mathcal{T}(1 \rightarrow 2)\right\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{R}_{(1\rightarrow 2)} = Y_{12}.\vec{y}_1 \\ \overrightarrow{0} \end{array} \right\}_{\forall M \in (I, \vec{y}_1)}$$

1 inconnue statique

Enoncé du PFS

Si un système matériel E est à l'équilibre dans un référentiel galiléen, **alors** le torseur des actions mécaniques extérieures à E est nul :

$$\left\{\mathcal{T}(ext \rightarrow E)\right\} = \{0\}$$

Remarque : Le PFS s'applique aussi dans les cas suivants :

- le système matériel E est sans accélération par rapport à un référentiel galiléen,
- le système matériel E est sans masse ou de masse négligeable.

Théorème des actions réciproques

Si un système matériel S_1 exerce une action mécanique sur une autre système S_2, alors S_2 exerce l'action opposée sur S_1 :

$$\left\{\mathcal{T}(S_2 \rightarrow S_1)\right\} = -\left\{\mathcal{T}(S_1 \rightarrow S_2)\right\}$$

Théorème de la Résultante Statique (TRS)

Si un système matériel E est à l'équilibre dans un référentiel galiléen, **alors** la résultante du torseur des actions mécaniques extérieures à E est nulle :

$$\overrightarrow{R}(ext \rightarrow E) = \vec{0}$$

Théorème du Moment Statique au point O (TMS en O)

Si un système matériel E est à l'équilibre dans un référentiel galiléen, **alors** le moment du torseur des actions mécaniques extérieures à E est nul :

$$\overrightarrow{M_O}(ext \rightarrow E) = \vec{0} \ \ \forall O$$

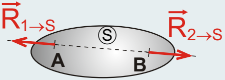
Hypothèses problème plan

- problème **cinématiquement plan** : vitesses dans le plan, vitesses de rotation normales au plan,
- **symétrie du chargement** et symétrie géométrique si prise en compte de la pesanteur.

L'application du PFS donnera 3 équations scalaires (2 de résultante et 1 de moment).

Solide S soumis à 2 glisseurs

Si un solide (ou ensemble de solides) est en équilibre sous l'action de **2 glisseurs** dans un référentiel galiléen, alors :



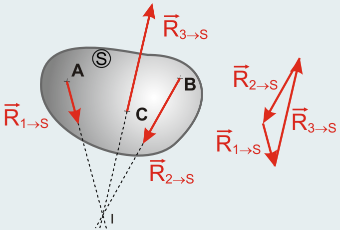
- leurs axes centraux sont confondus,
- les deux résultantes de même norme et de sens opposé.

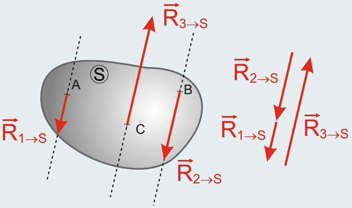
$$\overrightarrow{R}_{(1\to S)} = -\overrightarrow{R}_{(2\to S)} \text{ et } \overrightarrow{R}_{(1\to S)} \wedge \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{0}$$

Solide S soumis à 3 glisseurs

Si un solide (ou ensemble de solides) est en équilibre sous l'action de **3 glisseurs** dans un référentiel galiléen, alors :

- leurs axes centraux sont concourants ou parallèles,
- les résultantes sont coplanaires, de somme vectorielle nulle.

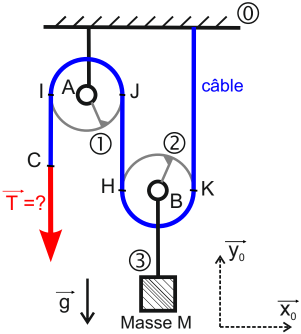




5 - Méthodologie

- **Dessiner** le graphe des liaisons en faisant **apparaître** les actions extérieures, **dénombrer** les inconnues d'action mécanique,
- **Définir** une stratégie d'isolements permettant de résoudre (**commencer** par les solides soumis à 2 glisseurs), puis **suivre** le "cheminement" de l'effort,
- **Mettre** en oeuvre votre démarche :
  - **préciser** le système isolé S_i,
  - **effectuer** le BAME appliqué à S_i,
  - **énoncer** les hypothèses,
  - **écrire** la (ou les) équation(s) utile(s) du PFS appliqué à S_i,
- **Résoudre** et **calculer** la (les) inconnue(s) recherchée(s).

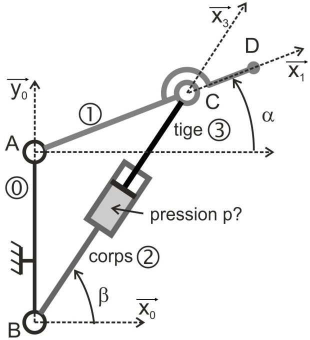
Exercice 1



Déterminer la tension T à appliquer sur le câble, en fonction de la charge M, afin de maintenir le système à l'équilibre dans $\mathcal{R}_0$ galiléen.
Rayon des poulies R.

$$\left\{\mathcal{T}_{(pes \rightarrow 3)}\right\} = \left\{ \begin{array}{c} -M.g.\vec{y}_0 \\ \vec{0} \end{array} \right\}_{G_3}$$

Exercice 2

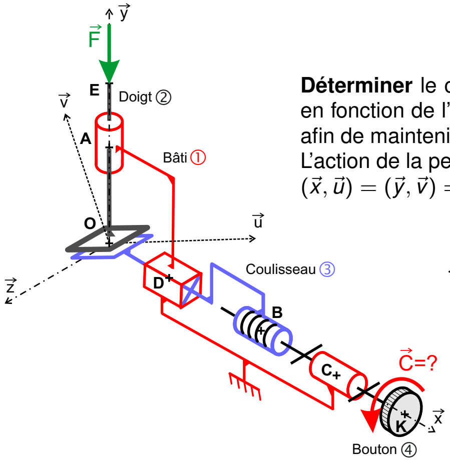


Déterminer la pression p dans le vérin (de section S) en fonction de l'effort F exercé en D sur **1** et des données géométriques, afin de maintenir le système à l'équilibre dans $\mathcal{R}_0$ galiléen.

$$\overrightarrow{BA} = h.\vec{y}_0;\ \overrightarrow{AC} = \ell.\vec{x}_1;\ \overrightarrow{AD} = L.\vec{x}_1;$$

$$\left\{\mathcal{T}(ext \rightarrow 1)\right\} = \left\{ \begin{array}{c} -F.\vec{y}_0 \\ \vec{0} \end{array} \right\}_D$$

Exercice 3



Déterminer le couple $C.\vec{x}$ à fournir au bouton de manoeuvre **4** en fonction de l'effort extérieur F et des données géométriques, afin de maintenir le système à l'équilibre dans $\mathcal{R}_1$ galiléen.
L'action de la pesanteur est négligée.
$(\vec{x}, \vec{u}) = (\vec{y}, \vec{v}) = \alpha(t)$; vis à droite de pas p

$$\left\{\mathcal{T}(ext \rightarrow 2)\right\} = \left\{ \begin{array}{c} -F.\vec{y} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_E$$

7 - Annexe - Cas de la liaison hélicoïdale

La puissance des actions mutuelles entre les 2 solides dans une liaison parfaite est nulle :

$$\mathcal{P}_{(1\leftrightarrow 2)} = \left\{\mathcal{V}_{2/1}\right\} \otimes \left\{\mathcal{T}(1 \rightarrow 2)\right\} = \overrightarrow{\Omega}_{2/1} \cdot \overrightarrow{M}_{A,(1\rightarrow 2)} + \overrightarrow{R}_{(1\rightarrow 2)} \cdot \overrightarrow{V}_{(A,2/1)} = 0$$

Soit pour une liaison hélicoïdale :

$$\mathcal{P}_{(1\leftrightarrow 2)} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{\Omega}_{(2/1)} = \omega_{21}.\vec{x}_{12} \\ \overrightarrow{V}_{(M,2/1)} = \frac{p}{2\pi}.\omega_{21}.\vec{x}_{12} \end{array} \right\}_M \otimes \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{R}_{(1\rightarrow 2)} \\ \overrightarrow{M}_{M,(1\rightarrow 2)} \end{array} \right\}_M = 0 \quad \forall M \in (A, \vec{x}_{12})$$

D'où :

$$\omega_{21}.\vec{x}_{12} \cdot \overrightarrow{M}_{M,(1\rightarrow 2)} + \frac{p}{2\pi}.\omega_{21}.\vec{x}_{12} \cdot \overrightarrow{R}_{(1\rightarrow 2)} = 0$$

Soit :

$$\overrightarrow{M}_{M,(1\rightarrow 2)} \cdot \vec{x}_{12} + \frac{p}{2\pi}\overrightarrow{R}_{(1\rightarrow 2)} \cdot \vec{x}_{12} = 0$$

$$\overrightarrow{M}_{M,(1\rightarrow 2)} \cdot \vec{x}_{12} = -\frac{p}{2\pi}\overrightarrow{R}_{(1\rightarrow 2)} \cdot \vec{x}_{12}$$

Pour une hélice à droite, on aura bien $\boxed{V_{21} = +\frac{p}{2\pi}.\omega_{21}}$ et $\boxed{L_{12} = -\frac{p}{2\pi}.X_{12}}$