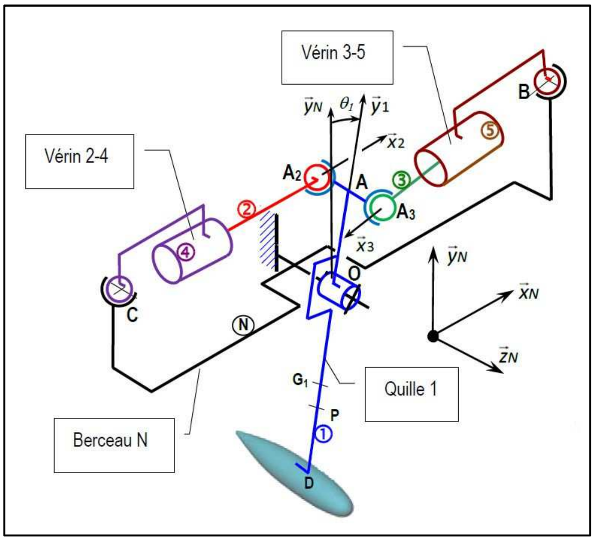
Quille pendulaire (d'après Mines-Ponts PSI 2014) Corrigé



Données :

$\overrightarrow{OA} = R.\vec{y}_1$; $\overrightarrow{AA_2} = -d.\vec{z}_N$; $\overrightarrow{AA_3} = d.\vec{z}_N$;

$\overrightarrow{OC} = -a.\vec{x}_N + b.\vec{y}_N - d.\vec{z}_N$; $\overrightarrow{OB} = a.\vec{x}_N + b.\vec{y}_N + d.\vec{z}_N$;

$\overrightarrow{DO} = L_{t1}.\vec{y}_1$; $\overrightarrow{OG_1} = -L_1.\vec{y}_1$

$avec\ R > 0, a > 0, d > 0, b > 0, L_1 > 0\ et L_{t1} > 0.$

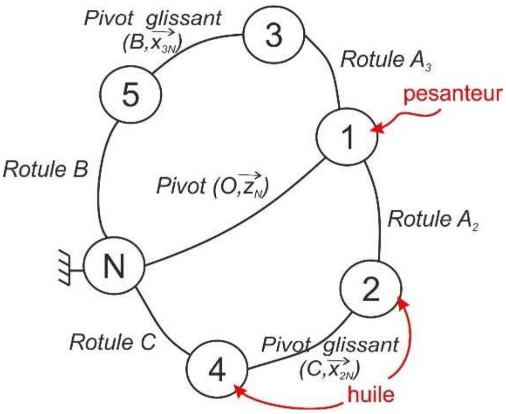
$\overrightarrow{CA} = x_{24}(t).\vec{x}_2$; $\overrightarrow{AB} = x_{35}(t).\vec{x}_3$; $\overrightarrow{A_3B} = x_{35}.\vec{x}_3$;

$\overrightarrow{CA_2} = x_{24}.\vec{x}_2$; $\theta_1 = (\vec{x}_N, \vec{x}_1)$ $\overrightarrow{OG_1} = -L_1.\vec{y}_1$ $L_1 > 0$,

M_1 : masse de la quille 1 ; $\vec{g} = -g.\overrightarrow{y_N}$

- Seul le vérin 2-4 est moteur ($F_{huile\to3}=0$): l'action mécanique motrice est donnée par $\{T_{huile\to2}\} = \begin{Bmatrix} \overrightarrow{F_{h2}} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_C$

Q1 - Dessiner le graphe des liaisons **en faisant apparaitre** les actions mécaniques extérieures.



Q2 - En précisant le système isolé, **montrer que** l'action de 2 sur 1 en A_2 est représentable par le glisseur dont la forme sera notée : $\{T_{2\to1}\} = \begin{Bmatrix} F_{21}.\overrightarrow{x_2} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_{A2}$ ou $\begin{Bmatrix} F_{21}.\overrightarrow{x_N} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_{A2}$ puisque $B_N = B_2$.

On isole le vérin : {2+4+huile}, BAME :

- $\{T_{1\to2}\} = -\{T_{2\to1}\} = -\begin{Bmatrix} \overrightarrow{R_{2\to1}} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_{A2}$
- $\{T_{N\to4}\} = \begin{Bmatrix} \overrightarrow{R_{N\to4}} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_C$

Le vérin est à l'équilibre dans R_N galiléen sous l'action de 2 glisseurs, donc : $\overrightarrow{R_{2\to1}} \wedge \underbrace{\overrightarrow{A_2C}}_{sur\ \overrightarrow{x_{2N}}} = \vec{0} \Rightarrow \boxed{\overrightarrow{\boldsymbol{R_{2\to1}}} = \boldsymbol{F_{21}}.\overrightarrow{\boldsymbol{x_{2N}}}}$

Q3 - Montrer qu'aucune action mécanique n'est transmise en A_3 entre 3 et 1.

On admettra que, comme la base B_2, $B_N = B_3$

- On isole le vérin : {3+5+huile}, BAME :

- $\{T_{1\to3}\} = -\{T_{3\to1}\} = -\begin{Bmatrix} \overrightarrow{R_{3\to1}} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_{A3}$
- $\{T_{N\to5}\} = \begin{Bmatrix} \overrightarrow{R_{N\to5}} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_B$

Le vérin est à l'équilibre dans R_N galiléen sous l'action de 2 glisseurs, donc : $\overrightarrow{R_{3\to1}} \wedge \underbrace{\overrightarrow{A_3B}}_{sur\ \overrightarrow{x_{3N}}} = \vec{0} \Rightarrow \boxed{\overrightarrow{\boldsymbol{R_{3\to1}}} = \boldsymbol{F_{31}}.\overrightarrow{\boldsymbol{x_{3N}}}}$

- On isole la tige+piston 3 du vérin , BAME :
- $\{T_{1\to3}\} = -\{T_{3\to1}\} = -\begin{Bmatrix} F_{31}.\overrightarrow{x_{3N}} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_{A3}$
- $\{T_{5\to3}\} = \begin{Bmatrix} \overrightarrow{R_{5\to3}} \\ \overrightarrow{M_{B,5\to3}} \end{Bmatrix}_B$ avec $\overrightarrow{M_{B,5\to3}} \cdot \overrightarrow{x_N} = 0$ et $\boldsymbol{\overrightarrow{R_{5\to3}} \cdot \overrightarrow{x_N} = 0}$
- $\{T_{huile\to3}\} = \begin{Bmatrix} \vec{0} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_{A3}$ hyp : $F_{huile\to3} = 0$

Le tige+piston 3 est à l’équilibre dans R_N galiléen, on applique le TRS projeté sur $\overrightarrow{x_N} \Rightarrow \boxed{\boldsymbol{F_{31} = 0}}$

Il n’y a pas d’action mécanique transmise en A₃ entre 3 et 1

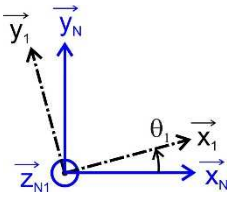
Q4 - En précisant le système isolé, **exprimer** le torseur d’action mécanique en O de N sur 1 : $\{T_{N\to1}\}_{pivot}$, en fonction de *d*, *g*, *M₁*, et F_{21}, dans la base $(\vec{x}_N, \vec{y}_N, \vec{z}_N)$.

On isole la quille 1 , BAME :

- $\{T_{3\to1}\} = \{0\}$
- $\{T_{2\to1}\} = \begin{Bmatrix} F_{21}.\overrightarrow{x_{2N}} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_{A2}$
- $\{T_{pes\to1}\} = \begin{Bmatrix} -M_1 g.\overrightarrow{y_N} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_{G_1}$
- $\{T_{N\to1}\} = \begin{Bmatrix} \overrightarrow{R_{N\to1}} \\ \overrightarrow{M_{O,N\to1}} \end{Bmatrix}_O$ avec $\boldsymbol{\overrightarrow{M_{O,N\to1}} \cdot \overrightarrow{z_N} = 0}$

La quille 1 est à l’équilibre dans R_N galiléen, on applique

- le TRS : $F_{21}.\overrightarrow{x_{2N}} - M_1 g.\overrightarrow{y_N} + \overrightarrow{R_{N\to1}} = \vec{0} \Rightarrow \boldsymbol{\overrightarrow{R_{N\to1}} = -F_{21}.\overrightarrow{x_{2N}} + M_1 g.\overrightarrow{y_N}}$
- le TMS en O : $\overrightarrow{OA_2} \wedge F_{21}\overrightarrow{x_{2N}} + \overrightarrow{OG_1} \wedge (-M_1 g.\overrightarrow{y_N}) + \overrightarrow{M_{O,N\to1}} = \vec{0}$
  $\left(R\vec{y}_1 - d\vec{z}_N\right) \wedge F_{21}\vec{x}_{2N} - L_1\vec{y}_1 \wedge (-M_1 g\vec{y}_N) + \overrightarrow{M_{O,N\to1}} = \vec{0}$
  $-RF_{21}\cos\theta_1\,\vec{z}_N - dF_{21}\vec{y}_N - L_1 M_1 g \sin\theta_1\,\vec{z}_N + \overrightarrow{M_{O,N\to1}} = \vec{0}$
  Or $\overrightarrow{M_{O,N\to1}} \cdot \overrightarrow{z_N} = 0 \Rightarrow \boldsymbol{\overrightarrow{M_{O,N\to1}} = dF_{21}\overrightarrow{y_N}}$



$$\boxed{\{\boldsymbol{T_{N\to1}}\} = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{-F_{21}.\overrightarrow{x_{2N}} + M_1 g.\overrightarrow{y_N}} \\ \boldsymbol{dF_{21}\overrightarrow{y_N}} \end{Bmatrix}_{\boldsymbol{O}}}$$

<u>Remarque</u> : en projection sur $\overrightarrow{z_N}$ on trouve la relation d’entrée-sortie entre l’action du vérin et celle de la pesanteur :

$$-RF_{21}\cos\theta_1 = L_1 M_1 g \sin\theta_1$$