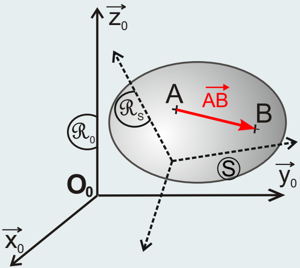
Cinématique des Systèmes Mécaniques

Spé MP-MP* 2025-2026

Lycée Thiers Marseille

Solide indeformable



Solide (S) **indéformable** si :

$$\forall A, B \in (S), \forall t, \left\|\overrightarrow{AB}\right\| = cte$$

Formule de Boor

Formule de dérivation dans une base mobile :

$$\left.\frac{d\,\vec{U}}{d\,t}\right|_0 = \left.\frac{d\,\vec{U}}{d\,t}\right|_S + \overrightarrow{\Omega}(S/0) \wedge \vec{U}$$

Vitesse du point A par rapport à $\mathcal{R}_0$

$$\vec{V}(A/0) = \left.\frac{d\overrightarrow{O_0A}}{dt}\right|_0$$

Remarques :

- Le point O_0 est fixe dans $\mathcal{R}_0$.
- Si A appartient matériellement à S ou lié rigidement à S alors $\vec{V}(A, S/0) = \vec{V}(A/0)$

Formule de Varignon $\forall A, B \in (S)$

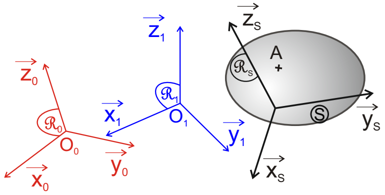
$$\overrightarrow{V}(B, S/0) = \overrightarrow{V}(A, S/0) + \overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{\Omega}(S/0)$$

Equiprojectivité des vitesses de S/0 $\forall A, B \in (S)$

$$\overrightarrow{V}(B, S/0) \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{V}(A, S/0) \cdot \overrightarrow{AB}$$

Torseur cinématique de S/0

$$\left\{\mathcal{V}_{(S/0)}\right\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{\Omega}(S/0) \\ \overrightarrow{V}(A, S/0) \end{array} \right\}_A$$



Composition des vecteurs rotation

$$\overrightarrow{\Omega}(S/0) = \overrightarrow{\Omega}(S/1) + \overrightarrow{\Omega}(1/0)$$

Composition des vecteurs vitesse

$$\underbrace{\overrightarrow{V}(A, S/0)}_{\text{absolue}} = \underbrace{\overrightarrow{V}(A, S/1)}_{\text{relative}} + \underbrace{\overrightarrow{V}(A, 1/0)}_{\text{d'entraînement}}$$

$$\overrightarrow{V}_{(A,S/0)} = \overrightarrow{V}_{(A/0)} = \left.\frac{d\overrightarrow{O_0A}}{dt}\right|_0 \; ; \; \overrightarrow{V}_{(A,S/1)} = \overrightarrow{V}_{(A/1)} = \left.\frac{d\overrightarrow{O_1A}}{dt}\right|_1 \; ; \; \overrightarrow{V}_{(A,1/0)} = \overrightarrow{V}_{(O_1,1/0)} + \overrightarrow{AO_1} \wedge \overrightarrow{\Omega}(1/0)$$

Composition des torseurs cinématiques

$$\left\{\mathcal{V}_{(S/0)}\right\} = \left\{\mathcal{V}_{(S/1)}\right\} + \left\{\mathcal{V}_{(1/0)}\right\}$$ *Ecrits au même point !*

4 - Champ des vecteurs accélération

Accélération du point A par rapport à $\mathcal{R}_0$

$$\boldsymbol{\overrightarrow{a}(A/0) = \left.\frac{d\overrightarrow{V}(A/0)}{dt}\right|_0 = \left.\frac{d^2\overrightarrow{O_0A}}{dt^2}\right|_0}$$

Si A appartient matériellement à S ou lié rigidement à S alors $\overrightarrow{a}(A,S/0) = \overrightarrow{a}(A/0)$.

Champ des vecteurs accélération $\forall A, B \in (S)$

$$\overrightarrow{a}(B,S/0) = \overrightarrow{a}(A,S/0) + \left.\frac{d\overrightarrow{\Omega}(S/0)}{dt}\right|_0 \wedge \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{\Omega}(S/0) \wedge \left(\overrightarrow{\Omega}(S/0) \wedge \overrightarrow{AB}\right)$$

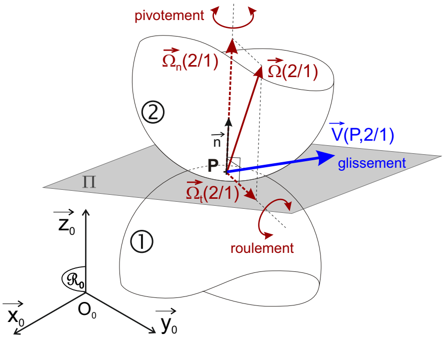
Remarques :

- Se démontre en appliquant la formule de dérivation vectorielle à la relation entre $\overrightarrow{V}_{(B,S/0)}$ et $\overrightarrow{V}_{(A,S/0)}$,
- ⚠ Le champ des vecteurs accélération n'est pas un champ de moments : $\overrightarrow{a}_{(B,S/0)} \cdot \overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{a}_{(A,S/0)} \cdot \overrightarrow{AB}$.

Composition des vecteurs accélération

$$\boldsymbol{\underbrace{\overrightarrow{a}(A,S/0)}_{\text{absolue}} = \underbrace{\overrightarrow{a}(A,S/1)}_{\text{relative}} + \underbrace{\overrightarrow{a}(A,1/0)}_{\text{d'entraînement}} + \underbrace{2.\overrightarrow{\Omega}(1/0) \wedge \overrightarrow{V}(A,S/1)}_{\text{de Coriolis}}}$$

5 - Contact ponctuel



$$\left\{\mathcal{V}_{(2/1)}\right\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{\Omega}_{(2/1)} = \vec{\Omega}_n(2/1) + \vec{\Omega}_t(2/1) \\ \vec{V}(P,2/1) \end{array} \right\}_P$$

(Π) : plan tangent commun à (S_1) et (S_2) en P.

Vecteur vitesse de glissement

Condition de maintien du contact :

$$\vec{V}(P,2/1) \in (\Pi) \Rightarrow \boldsymbol{\vec{V}(P,2/1)\cdot\vec{n}=0}$$

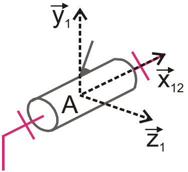
Par composition :

$$\boldsymbol{\vec{V}(P,2/1) = \vec{V}(P,2/0) - \vec{V}(P,1/0)}$$

Condition de roulement sans glissement

$$\boldsymbol{\vec{V}(P,2/1) = \vec{0}} \Rightarrow \left\{\mathcal{V}_{(2/1)}\right\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{\Omega}_{(2/1)} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_P$$

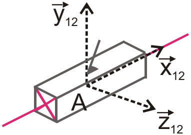
6 - Torseurs cinématiques



Pivot d'axe (A,$\vec{x}_{12}$)

$$\left\{\mathcal{V}_{(2/1)}\right\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{\Omega}_{(2/1)} = \omega_{21}.\vec{x}_{12} \\ \overrightarrow{0} \end{array} \right\}_{\forall M \in (A,\vec{x}_{12})}$$

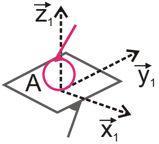
1 degré de liberté en rotation



Glissière de direction $\vec{x}_{12}$

$$\left\{\mathcal{V}_{(2/1)}\right\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{0} \\ \overrightarrow{V}_{(M,2/1)} = v_{21}.\vec{x}_{12} \end{array} \right\}_{\forall M}$$

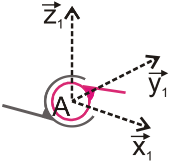
1 degré de liberté en translation



Sphère plan (ponctuelle) de normale $\vec{z}_1$ de contact A

$$\left\{\mathcal{V}_{(2/1)}\right\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{\Omega}_{(2/1)} \\ \overrightarrow{V}_{(M,2/1)} \end{array} \right\}_{\forall M \in (A,\vec{z}_1)} \qquad \text{avec } \overrightarrow{V}_{(M,2/1)} \cdot \vec{z}_1 = 0$$

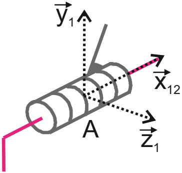
3 degrés de liberté en rotation, 2 degrés de liberté en translation



Sphérique (rotule) de centre A

$$\left\{\mathcal{V}_{(2/1)}\right\} = \left\{\begin{array}{c} \overrightarrow{\Omega}_{(2/1)} \\ \overrightarrow{0} \end{array}\right\}_A$$

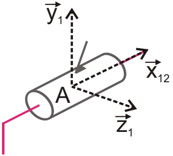
3 degrés de liberté en rotation



Hélicoïdale d'axe (A,$\vec{x}_{12}$) (hélice à droite, pas p)

$$\left\{\mathcal{V}_{(2/1)}\right\} = \left\{\begin{array}{c} \overrightarrow{\Omega}_{(2/1)} = \omega_{21}.\vec{x}_{12} \\ \overrightarrow{V}_{(M,2/1)} = \frac{p}{2\pi}.\omega_{21}.\vec{x}_{12} \end{array}\right\}_{\forall M \in (A,\vec{x}_{12})}$$

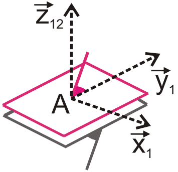
1 degré de liberté : rotation et translation liées



Pivot glissant d'axe (A,$\vec{x}_{12}$)

$$\left\{\mathcal{V}_{(2/1)}\right\} = \left\{\begin{array}{c} \overrightarrow{\Omega}_{(2/1)} = \omega_{21}.\vec{x}_{12} \\ \overrightarrow{V}_{(M,2/1)} = v_{21}.\vec{x}_{12} \end{array}\right\}_{\forall M \in (A,\vec{x}_{12})}$$

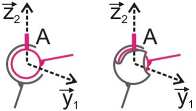
1 degré de liberté en rotation, 1 degré de liberté en translation



Appui plan de normale $\vec{z}_{12}$

$$\left\{\mathcal{V}(2/1)\right\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{\Omega}_{(2/1)} = \omega_{21}.\vec{z}_{12} \\ \overrightarrow{V}_{(M,2/1)} \end{array} \right\}_{\forall M} , \overrightarrow{V}_{(M,2/1)} \cdot \vec{z}_{12} = 0$$

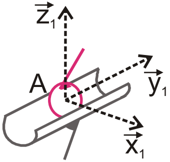
1 degré de liberté en rotation, 2 degrés de liberté en translation



Sphérique à doigt de centre A d'axe (A,$\vec{z}_2$), de normale $\vec{y}_1$

$$\left\{\mathcal{V}(2/1)\right\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{\Omega}_{(2/1)} \\ \overrightarrow{0} \end{array} \right\}_{A} \text{ avec } \overrightarrow{\Omega}_{(2/1)} \cdot \vec{x}_1 = 0$$

2 degrés de liberté en rotation



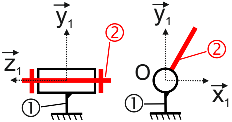
Sphère cylindre de centre A et de direction $\vec{y}_1$

$$\left\{\mathcal{V}(2/1)\right\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{\Omega}_{(2/1)} \\ \overrightarrow{V}_{(A,2/1)} = v_{21}.\vec{y}_1 \end{array} \right\}_{A}$$

3 degrés de liberté en rotation, 1 degré de liberté en translation

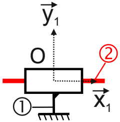
7 - Liaisons planes

Plan $(O, \vec{x}_1, \vec{y}_1)$



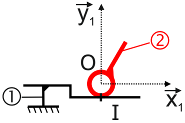
Pivot d'axe $(O,\vec{z}_{12})$

$$\left\{\mathcal{V}_{(2/1)}\right\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{\Omega}_{(2/1)} = \omega_{21}.\vec{z}_{12} \\ \overrightarrow{0} \end{array} \right\}_O$$



Glissière de direction $\vec{x}_{12}$

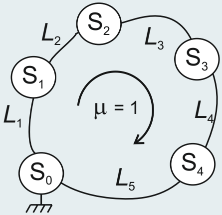
$$\left\{\mathcal{V}_{(2/1)}\right\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{0} \\ \overrightarrow{V}_{(M,2/1)} = v_{21}.\vec{x}_{12} \end{array} \right\}_{\forall M \in (O, \vec{x}_1, \vec{y}_1)}$$



Sphère plan (ponctuelle) de normale $\vec{y}_1$ de contact I

$$\left\{\mathcal{V}_{(2/1)}\right\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{\Omega}_{(2/1)} = \omega_{21}.\vec{z}_{12} \\ \overrightarrow{V}_{(M,2/1)} = v_{21}.\vec{x}_1 \end{array} \right\}_{\forall M \in (O, \vec{y}_1)}$$

Chaîne fermée



Indice de mobilité :

- 3D : $\boxed{I_m = \sum I_c - 6\mu}$
- 2D : $\boxed{I_m = \sum I_c - 3.\mu}$

Mobilité (cinématique) : $\boxed{m = m_u + m_i}$

But : Déterminer une loi E/S géométrique ou cinématique,
Entrée = actionneur, paramètre pilote, Sortie = effecteur, paramètre utile.

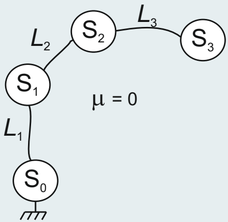
En pratique :

- **2D** : **Ecrire** une fermeture géométrique (vectorielle-angulaire), puis dériver si nécessaire,
- **3D** : **Ecrire** une fermeture cinématique (torseurs)

Remarques :

- I_m peut être interprété comme le nombre de relations existantes entre les paramètres cinématiques,
- m peut être interprété comme le nombre de paramètres cinématiques à fixer pour bloquer le mécanisme,
- $m = I_m$ si le système est isostatique ($h = 0$).

Chaîne ouverte



Mobilité (cinématique) :

$$\boxed{m = \sum l_c}$$

But : Déterminer la position, la vitesse, l'accélération d'un point du dernier solide par rapport au solide de référence (bâti).

En pratique : Dériver directement le vecteur position peut s'avérer plus rapide.

👍 **Connaitre parfaitement** tous les torseurs de liaisons.

⚠ **Ne JAMAIS projeter** (sauf si c'est demandé).

Vitesse $\vec{V}_{(B,2/0)}$

Dérivation du vecteur position :

$$\vec{V}_{(B,2/0)} = \left.\frac{d\overrightarrow{O_0B}}{dt}\right|_0$$

Relation de Varignon:

$$\vec{V}_{(B,2/0)} = \vec{V}_{(A,2/0)} + \overrightarrow{BA} \wedge \vec{\Omega}_{(2/0)}$$

Composition des mouvements :

$$\vec{V}_{(B,2/0)} = \vec{V}_{(B,2/1)} + \vec{V}_{(B,1/0)}$$

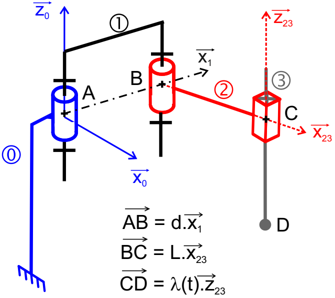
Position $\overrightarrow{O_0B}$

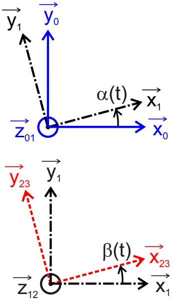
Point A : $\vec{V}_{(A,2/0)}$

Solide S_1

Exercice 1

Schéma cinématique 3D



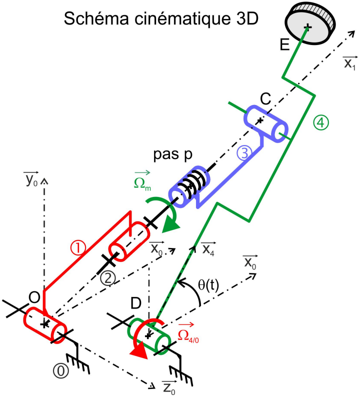


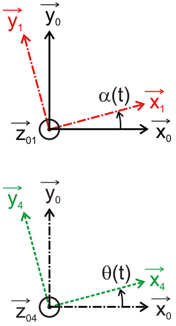
Déterminer la vitesse et l'accélération du point D dans son mouvement par rapport à $\mathcal{R}_0$:

$$\overrightarrow{V}(D,3/0) = fct(\dot{\alpha},\dot{\beta},\dot{\lambda}); \ \overrightarrow{a}(D,3/0) = fct(\dot{\alpha},\ddot{\alpha},\dot{\beta},\ddot{\beta},\ddot{\lambda}).$$

Exercice 2

Schéma cinématique 3D





$$\overrightarrow{OD} = d.\vec{x}_0 - h.\vec{y}_0$$
$$\overrightarrow{DC} = L.\vec{x}_4$$
$$\overrightarrow{OC} = \lambda(t).\vec{x}_1$$
$$\vec{\Omega}_m = \vec{\Omega}_{2/1} = \omega_m.\vec{x}_1$$
$$\vec{\Omega}_{4/0} = \omega_{40}.\vec{z}_0$$

Déterminer la vitesse de rotation du bras $\omega_{4/0}$ en fonction de ω_m et θ.