Asservissement rappels 2
Systèmes du 1er ordre et 2nd ordre

Spé MP–MP* 2025-2026

Lycée Thiers Marseille

1 - Formes canoniques

1*er* ordre

$$\mathbf{H}(\mathbf{p}) = \frac{\mathbf{K}}{\mathbf{1} + \tau.\mathbf{p}}$$

K : Gain statique
τ : constante de temps

1 - Formes canoniques

1*er* ordre

$$\mathbf{H}(\mathbf{p}) = \frac{\mathbf{K}}{\mathbf{1} + \tau.\mathbf{p}}$$

K : Gain statique
τ : constante de temps

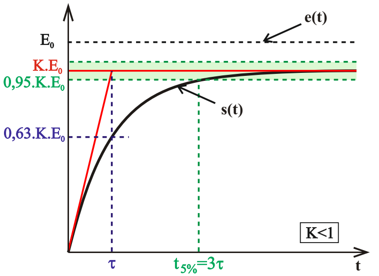
2*nd* ordre

$$\mathbf{H}(\mathbf{p}) = \frac{\mathbf{K}}{\mathbf{1} + \frac{\mathbf{2.z}}{\omega_\mathbf{0}}.\mathbf{p} + \frac{\mathbf{1}}{\omega_\mathbf{0}^\mathbf{2}}.\mathbf{p}^\mathbf{2}}$$

K : Gain statique
z : Coefficient d'amortissement ($z > 0$)
ω_0 : Pulsation propre non amortie ($\omega_0 > 0$)

2.1 - Système du 1er ordre : Réponse temporelle à un échelon

Réponse à un échelon $e(t) = E_0.u(t)$

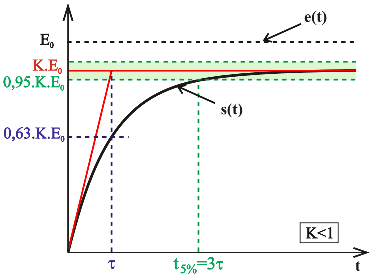


Propriétés de la réponse s(t)

- $s(t) = K.E_0.(1 - e^{-t/\tau}).u(t)$
- asymptote en $+\infty$ = $K.E_0$
- pente de la tangente à l'origine : $\lim_{t \to 0} s'(t) = K.E_0/\tau$

2.1 - Système du 1er ordre : Réponse temporelle à un échelon

Réponse à un échelon $e(t) = E_0.u(t)$



Propriétés de la réponse s(t)

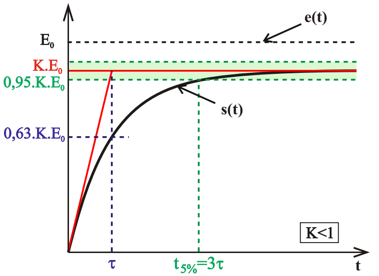
- $s(t) = K.E_0.(1 - e^{-t/\tau}).u(t)$
- asymptote en $+\infty$ = $K.E_0$
- pente de la tangente à l'origine : $\lim_{t \to 0} s'(t) = K.E_0/\tau$

Identification

- K : asymptote en $+\infty$ = $K.E_0$
- τ : temps à 63% de la valeur finale

2.1 - Système du 1er ordre : Réponse temporelle à un échelon

Réponse à un échelon $e(t) = E_0.u(t)$



Propriétés de la réponse s(t)

- $s(t) = K.E_0.(1 - e^{-t/\tau}).u(t)$
- asymptote en $+\infty$ = $K.E_0$
- pente de la tangente à l'origine : $\lim_{t \to 0} s'(t) = K.E_0/\tau$

Identification

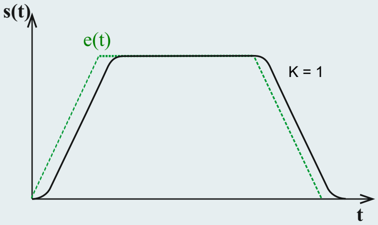
- K : asymptote en $+\infty$ = $K.E_0$
- τ : temps à 63% de la valeur finale

Performances

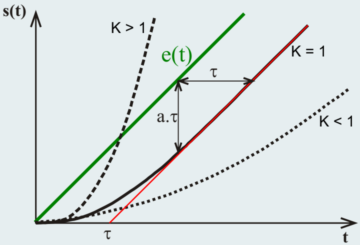
- **Précision** : $Er_\infty = \lim_{t \to +\infty} (e(t) - s(t)) = E_0.(1 - K)$
- **Rapidité** : $t_{5\%} \approx 3\tau$
- **Stabilité** : toujours stable (si $\tau > 0$)

2.2 - Système du 1er ordre : Réponse temporelle à une rampe

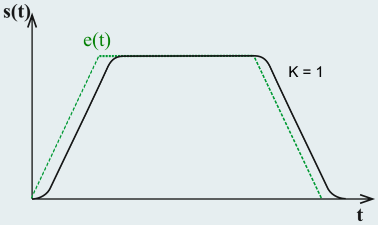
Réponse à une entrée en trapèze



Réponse à une rampe $e(t) = a.t.u(t)$

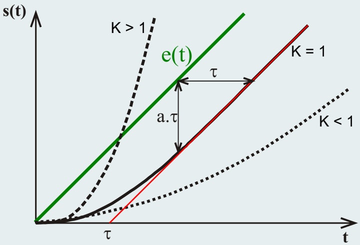


Réponse à une entrée en trapèze

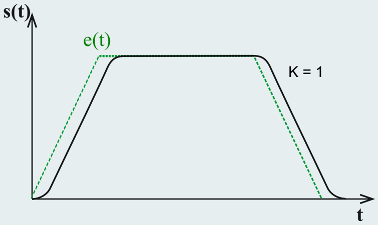


2.2 - Système du 1er ordre : Réponse temporelle à une rampe

Réponse à une rampe $e(t) = a.t.u(t)$



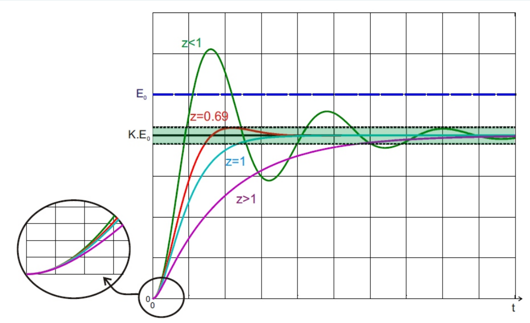
Réponse à une entrée en trapèze



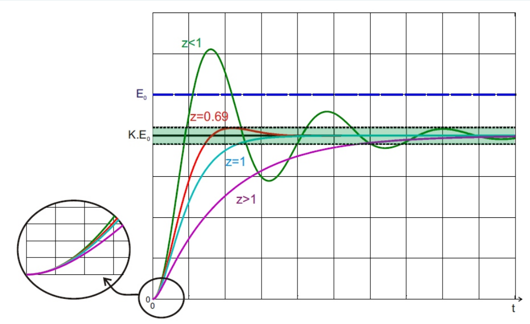
Propriétés de la réponse s(t)

- $s(t) = K.a.(t - \tau + \tau.e^{-t/\tau}).u(t)$
- **asymptote en $+\infty$** :
  $s(t) \approx K.a.(t - \tau)$, de pente K.a et coupe l'axe des temps en $t = \tau$

Réponse à un échelon $e(t) = E_0.u(t)$



Réponse à un échelon $e(t) = E_0.u(t)$

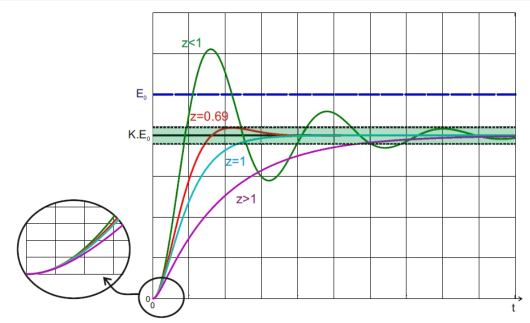


Propriétés de la réponse s(t)

z	pôles	à retenir

3 - Système du 2nd ordre : Réponse à un échelon

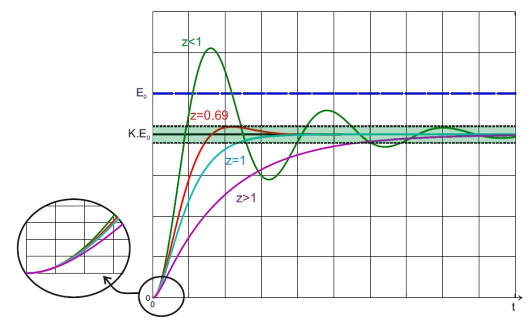
Réponse à un échelon $e(t) = E_0.u(t)$



Propriétés de la réponse s(t)

z	pôles	à retenir
$z > 1$	$p = -z.\omega_0 \pm \omega_0.\sqrt{z^2 - 1}$	si z>4 équivalent à un 1er ordre

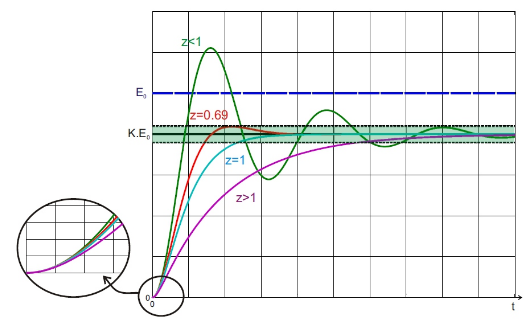
Réponse à un échelon $e(t) = E_0.u(t)$



Propriétés de la réponse s(t)

z	pôles	à retenir
$z > 1$	$p = -z.\omega_0 \pm \omega_0.\sqrt{z^2 - 1}$	si z>4 équivalent à un 1er ordre
$z = 1$	$p = -z.\omega_0$	réponse **la plus rapide sans dépassement**

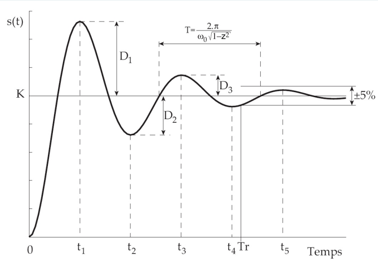
Réponse à un échelon $e(t) = E_0.u(t)$



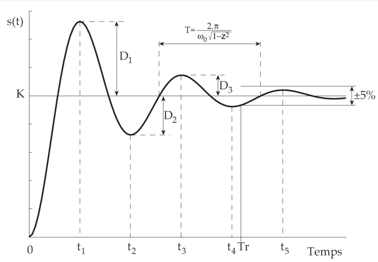
Propriétés de la réponse s(t)

z	pôles	à retenir
$z > 1$	$p = -z.\omega_0 \pm \omega_0.\sqrt{z^2 - 1}$	si z>4 équivalent à un 1er ordre
$z = 1$	$p = -z.\omega_0$	réponse **la plus rapide sans dépassement**
$z < 1$ z≈0.69	$p = -z.\omega_0 \pm i.\omega_0.\sqrt{1 - z^2}$	$\omega_p = \omega_0.\sqrt{1 - z^2}$ pseudo-pulsation réponse **la plus rapide**, DR1 = 5%

Identification de la réponse à un échelon pour **z<1**

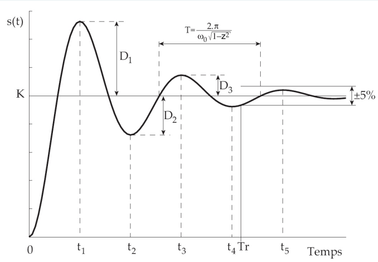


Identification de la réponse à un échelon pour **z<1**



- pseudo-période $T_p = \dfrac{2.\pi}{\omega_0\sqrt{1-z^2}}$

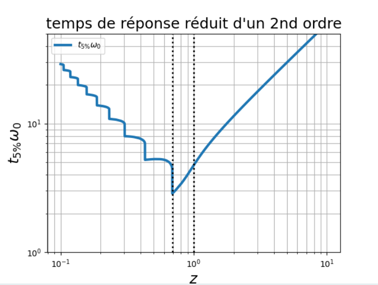
Identification de la réponse à un échelon pour **z<1**



- pseudo-période $T_p = \dfrac{2.\pi}{\omega_0 \sqrt{1 - z^2}}$

Performances $\forall z$

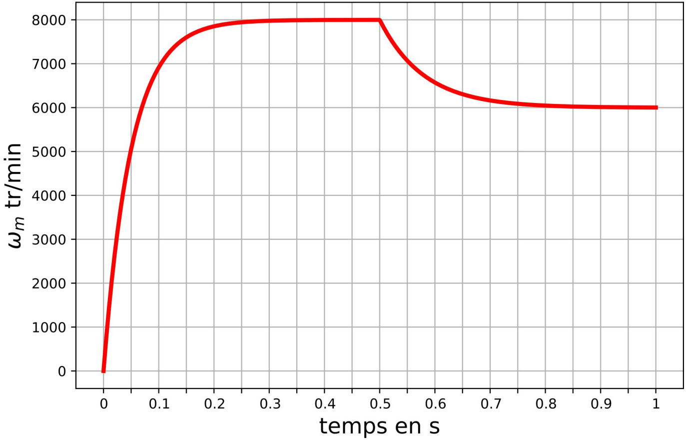
- **Précision** :
  $$Er_\infty = \lim_{t \to +\infty} (e(t) - s(t)) = E_0.(1 - K)$$
- **Rapidité** : abaque $t_{5\%}.\omega_0$ en fonction de z



- **Stabilité** : toujours stable (si coefficients du dénominateur positifs)

4 - Exercice

Identifier à partir d'une réponse temporelle



Un moteur à courant continu est alimenté par une tension $u_m(t)$ d'amplitude $u_0 = 6V$, un couple résistant $c_r(t)$ de type échelon d'amplitude $c_{r0} = 0,007 N.m$ est appliqué à l'instant $t = 0,5s$.
Déterminer les expressions numériques des fonctions $H_m(p) = \frac{\Omega_m(p)}{U_m(p)}$ et $H_{Cr}(p) = \frac{\Omega_m(p)}{C_r(p)}$.