Véhicule auto-balancé de type Segway® CORRIGÉ (d'après Centrale PSI 2005)

***Q1* - Montrer que** le schéma bloc du système peut se mettre sous la forme présentée ci-dessous en déterminant l'expression littérale de $H_1(p)$.

Les conditions initiales sont toutes nulles. On obtient à partir de la seconde équation différentielle dans le domaine de Laplace, l'équation suivante :

$(DA - B^2)\ddot{\chi}(t) = 2\left(\frac{B}{R} + D\right)C_m(t) + DC\chi(t) \xrightarrow{L} [(DA - B^2)p^2 - DC]\chi(p) = 2(\frac{B}{R} + D)C_m(p)$.

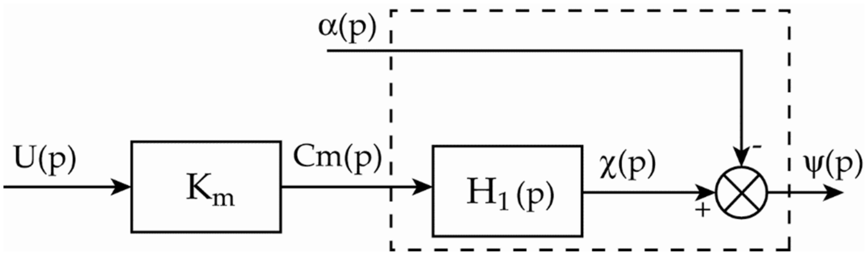
On en déduit

$$H1(p) = \frac{2(\frac{B}{R} + D)}{(DA - B^2)p^2 - \mathrm{DC}}$$

Le schéma bloc se justifie alors en écrivant :

$\chi(t) = \alpha(t) + \psi(t) \xrightarrow{L} \Psi(p) = \chi(p) - \alpha(p) = F_1(p)U(p) - \alpha(p)$

Et $\mathrm{Cm}(t) = \mathrm{Km.u(t)} \xrightarrow{L} \mathrm{Cm(p)} = \mathrm{Km.U(p)}$



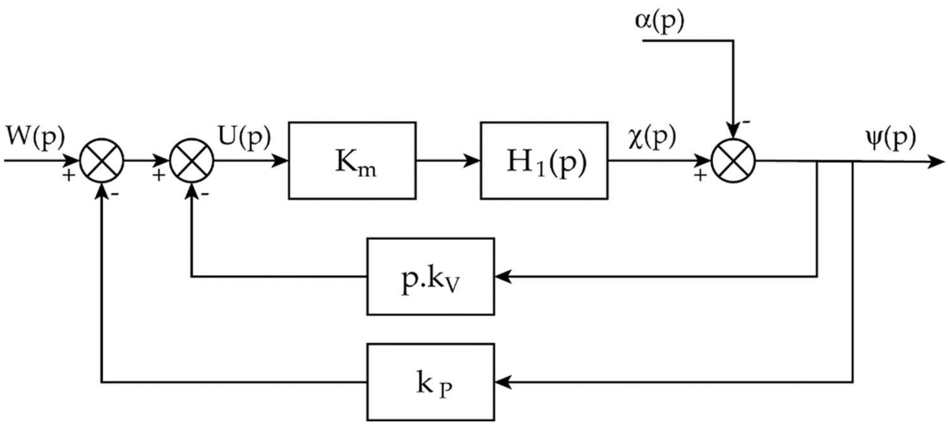
***Q2* - Analyser** la stabilité du système d'entrée u(t) et de sortie $\psi(t)$ ($\alpha = 0$) en étudiant la fonction de transfert $F_1(p) = \dfrac{\psi(p)}{U(p)}$. Pouvait-on s'attendre à ce résultat (considérations physiques) ?

$F_1(p) = K_m \frac{2(\frac{B}{R}+D)}{(DA-B^2)p^2-\mathrm{DC}}$. Le système d'entrée $u(t)$ et de sortie $\psi(t)$ est instable, en boucle ouverte, car le dénominateur de la fonction de transfert possède un pôle réel positif :

$p_i = \pm\sqrt{\frac{DC}{DA-B^2}}$ avec $\frac{\mathrm{DA-B^2}}{\mathrm{DC}}=6.10^{-2} > 0$.

Autre justification : F1(p) est du 2nd ordre, le système est stable si et seulement si les coefficients du dénominateur sont de même signe or ici, les coefficients sont $-DC < 0$, 0 et $DA - B^2 > 0$.

Ce résultat était prévisible du fait que le centre d'inertie du système est situé au dessus de l'axe des roues.



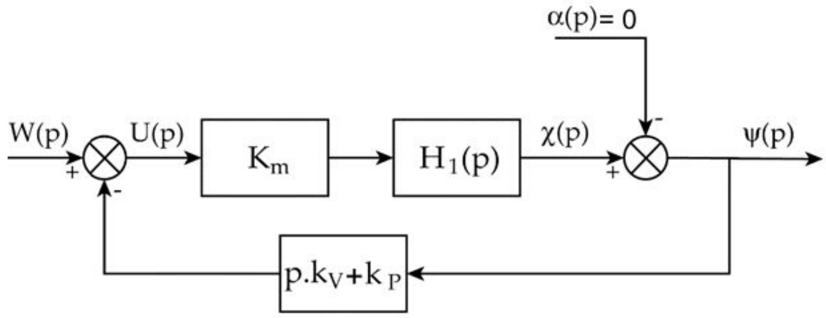
***Q3* - ** Dans le cas où $\alpha = 0$, **déterminer** $F_2(p) = \frac{\psi(p)}{W(p)}$, en fonction de K_S, k_p, k_v et ω_1 .

en appliquant 2 fois la formule de Black :

$$F_2(p) = \frac{\Psi(p)}{W(p)} = \frac{\frac{K_m H_1(p)}{1 + p k_v K_m H_1(p)}}{1 + k_p \frac{K_m H_1(p)}{1 + p k_v K_m H_1(p)}} = \frac{K_m H_1(p)}{1 + p k_v K_m H_1(p) + k_p K_m H_1(p)}$$

$$\boldsymbol{F_2(p) = \frac{K_s}{\frac{p^2}{\omega_1{}^2} + p k_v K_s + k_p K_s - 1}}$$

Ou plus simplement en utilisant le schéma blocs équivalent :



$$F_2(p) = \frac{K_m H_1(p)}{1 + K_m H_1(p)(\mathrm{p}.k_v + k_p)}$$

***Q4* - Déterminer**, en fonction de K_S, k_P, k_V et ω_1 les expressions de K_2, ξ, ω_0 .

$$F_2(p) = \frac{\frac{K_s}{k_p K_s - 1}}{\frac{p^2}{(k_p K_s - 1)\omega_1{}^2} + \frac{p k_v K_s}{k_p K_s - 1} + 1} = \frac{K_2}{1 + \frac{2\xi}{\omega_0} p + \frac{p^2}{\omega_0{}^2}}$$

soit : $K_2 = \frac{K_s}{k_p K_s - 1}$, $\omega_0 = \sqrt{(k_p K_s - 1)}\omega_1$, $\xi = \frac{1}{2}\omega_0 \frac{k_v K_s}{k_p K_s - 1} = \frac{1}{2} \frac{k_v K_s \omega_1}{\sqrt{k_p K_s - 1}}$

***Q5* -** A l'aide de l'abaque donné ci-dessous, **déterminer** les valeurs de k_V et de k_P telles que le temps de réponse à 5% t_r soit minimal. **En déduire** le pourcentage de dépassement attendu pour une entrée en échelon.

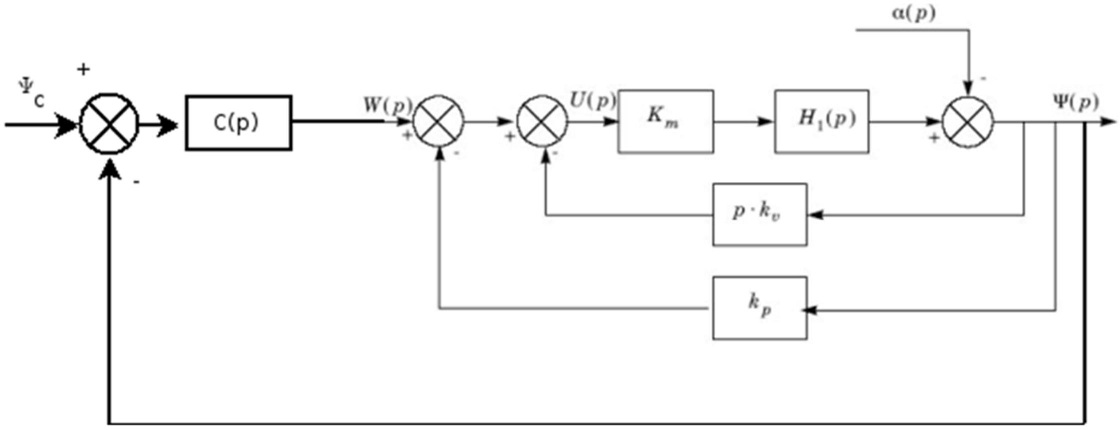
Pour un système du second ordre, le temps de réponse à 5% est minimal pour $\xi = 0.69$.
On en déduit pour $\omega_0 = 1{,}5\omega_1$:

$$k_p = (1{,}5^2 + 1)/K_s = \mathbf{13{,}54}\ \boldsymbol{V/rad}$$

$$k_v = 2\xi \frac{k_p K_s - 1}{K_s \omega_0} = 2{*}0{,}69 \frac{13{,}54{*}0{,}24 - 1}{0{,}24{*}6{,}15} = \mathbf{2{,}15}\ \boldsymbol{V.rad^{-1}.s}$$

I- Asservissement d'inclinaison du chariot

***Q6* - Compléter** le schéma bloc de l'asservissement, fourni en annexe1, en faisant apparaître la régulation de l'inclinaison.



***Q7* - Déterminer** la FTBO de cet asservissement.

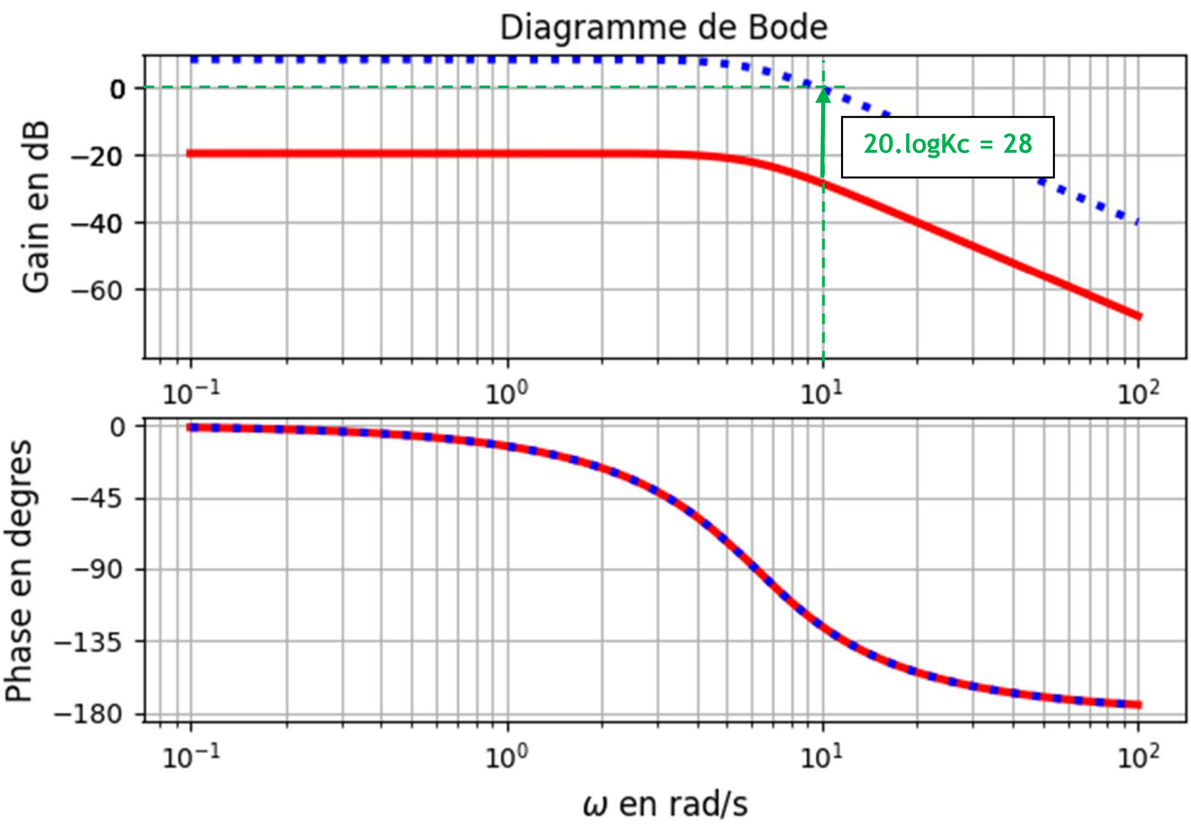
$\mathrm{FTBO(p)} = \mathrm{C(p)}.F_2(p) = \mathrm{C(p)}\frac{K_2}{1+\frac{2\xi}{\omega_0}p+\frac{p^2}{\omega_0{}^2}}$ car retour unitaire.

***Q8* -** Le diagramme de Bode en boucle ouverte étant donné en annexe 2 pour Kc = 1, **déterminer** la valeur de Kc tel que $\omega_{BO\ 0dB} = \mathbf{10}\boldsymbol{rad/s}$.

C(p) = Kc

$GdB_{BO} = 20.log|FTBO(j\omega)| = 20logKc + 20log|F_2(j\omega)|$

On lit 20.logKc = 28 dB ⇒ $\boldsymbol{Kc} = \mathbf{10^{28/20}} \approx \mathbf{25}$



***Q9 -* Mettre** la fonction $F_3(p) = \frac{\psi(p)}{\alpha(p)}$ sous forme canonique et **en déduire** le gain statique en fonction de K_C.

$$F_3(p) = \frac{1-\frac{p^2}{\omega_1^2}}{\frac{p^2}{\omega_1^2} - 1 + K_S(K_C + k_p + p.k_v)}$$

$$F_3(p) = \frac{1}{K_S(K_C+k_p)-1} . \frac{1-\frac{p^2}{\omega_1^2}}{1+\frac{K_S.k_v.p}{\left(K_S(K_C+k_p)-1\right)} + \frac{p^2}{\omega_1^2\left(K_S(K_C+k_p)-1\right)}}$$

D'où $\boxed{\boldsymbol{K_3 = \frac{1}{K_S(K_C+k_p)-1}}}$

***Q10 -* Calculer** l'inclinaison □(t) du châssis en régime permanent, lorsque la perturbation □(t) est un échelon d'amplitude □₀. Le cahier des charges est-il satisfait ?

$\boxed{\lim_{t\to\infty}\psi(t) = \lim_{p\to 0} p\,\psi(p) = \frac{\alpha_0}{K_S(K_c+k_p)-1} \neq 0}$. Le cahier des charges n'est pas satisfait.

***Q11 -* Montrer que** ce correcteur permet de satisfaire le cahier des charges vis-à-vis de l'écart en régime permanent pour une perturbation en échelon.

$$C(p) = K_i\left(1+\frac{1}{T_i.p}\right)$$

Le correcteur intégral permet de satisfaire le cahier des charges :

$C(p) = K_I\left(1+\frac{1}{T_I.p}\right) = \frac{K_I}{p}\left(p+\frac{1}{T_I}\right) \underset{p\to 0}{\approx} \frac{K_I}{T_I.p}$ et $\boxed{\lim_{t\to\infty}\psi(t) = \lim_{p\to 0} p\,\psi(p) = \lim_{p\to 0}\frac{\alpha_0}{K_S(\frac{K_I}{T_I.p}+k_p+p.k_v)-1} = 0}$

<u>**Vérification graphique des performances attendues**</u>

***Q12 -* Conclure** quant au respect des critères de dépassement et de précision associés à la fonction de service FS2. **Justifier** votre réponse par des tracés graphiques sur la figure de l'annexe 3.

La convergence de $\psi(t)$ vers 0 lorsque $t \to \infty$ est réalisée.
Le dépassement d'inclinaison est inférieur à 30% (de l'ordre de 15%).
Le cahier des charges est donc respecté.