Document Réponses

CORRIGÉ

I - Introduction

Question 1 Vitesse azimutale maximale du soleil en degrés par seconde, notée $\Omega_{a\ max}$ et déplacement maximal du soleil pendant un intervalle de 15 min, noté $\varphi_{a\ max}$ en degrés.

 $\Omega_{a\ max}$ correspond à la valeur maximale de la dérivé (pente de la tangente à la courbe), soit à 14h. La lecture graphique ne permet d'avoir une précision à ± 1h en abscisse et ± 60° en ordonnée.

On a alors:

$$\Omega_{a \, max} = \frac{360 - 0}{20 - 8}$$

$$\Omega_{a \, max} = 8.10^{-3} \, / s = 30^{\circ} / h$$

$$\varphi_{a \; max} = \Omega_{a \; max}.\Delta t$$

$$\varphi_{a max} = 15 \times 60 \times 8.10^{-3}$$
 $\varphi_{a max} = 7^{\circ}$

$$\varphi_{a max} \in [6^{\circ}, 10^{\circ}]$$

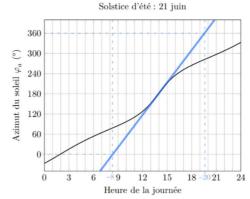
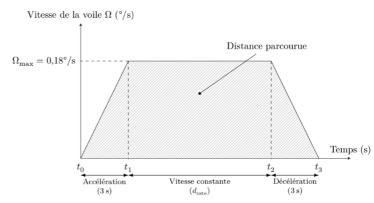


Figure 3 Évolution de l'azimut du soleil (φ_a en degrés) au solstice d'été

Question 2 Durée de déplacement d_{cst} à la vitesse maximale (de t_1 à t_2) pour suivre le soleil pendant l'intervalle de temps de 15 min en fonction de Ω_{max} et de $\varphi_{a\ max}$.

La distance parcourue est égale à l'aire sous la courbe :



On a alors:

Figure 4 Profil de vitesse de la voile

$$\varphi_{a \; max} = \frac{1}{2} \Omega_{max} (t_1 - t_0) + \Omega_{max} (t_2 - t_1) + \frac{1}{2} \Omega_{max} (t_3 - t_2)$$

Or
$$t_1 - t_0 = t_3 - t_2$$
 et $t_2 - t_1 = d_{cst}$

$$\Leftrightarrow \varphi_{a \; max} = \Omega_{max}(t_1 - t_0 + d_{cst})$$

$$\Leftrightarrow \boxed{d_{cst} = \frac{\varphi_{a max}}{\Omega_{max}} + t_0 - t_1}$$

Commentaires:

Ne pas mélanger expression littérale et numérique.

Question 3 Durée totale du déplacement, d_{totale} (de t_0 à t_3), avec ce profil de vitesse. Conclusion.

$$\begin{split} d_{totale} &= t_3 - t_0 = (t_1 - t_0) + d_{cst} + (t_3 - t_2) \\ d_{totale} &= (t_1 - t_0) + \left(\frac{\varphi_{a \, max}}{\Omega_{max}} + t_0 - t_1\right) + (t_3 - t_2) \\ d_{totale} &= 3 + \left(\frac{7}{0,18} - 3\right) + 3 = 42s \end{split}$$

Le cahier des charges spécifie que le déplacement doit être inférieur à 1 min, $d_{totale} = 42s$ il est donc **respecté**.

Commentaires:

L'unité SI d'une vitesse angulaire est le

 $\omega = \frac{V}{R} \qquad [rad/s] = [s^{-1}] = \frac{[m/s]}{[m]}$

rad/s et non deg/s.

II - Analyse de la commande en boucle ouverte du déplacement de la voile solaire

Question 4 Conclusion quant au respect des exigences Id 1.1 et Id 1.2 à partir des courbes figure 9.

Vérification de l'exigence Id 1.1 :

Le chariot se déplace de 3,651 mètres en 49 secondes,

ce qui donne une vitesse de déplacement $v_{déplacement} = \frac{\Delta d}{\Delta t}$

A.N.
$$v_{déplacement} = \frac{3,651}{49}$$
 $v_{déplacement} = 7, 5. 10^{-2} \text{ m/s}$

Soit une vitesse de déplacement angulaire $\omega_{d\acute{e}placement} = \frac{v_{d\acute{e}placement}}{R}$

A.N.
$$\omega_{déplacement} = \frac{7,5.10^{-2}}{22.75} = 3,3.10^{-3} \ rad/s$$
 $\omega_{déplacement} = \mathbf{0}, \mathbf{19}^{\circ}/s \ (> \mathbf{0}, \mathbf{18}^{\circ}/s)$

Exigence 1.1	Vitesse de déplacement < 0,18°/s	$\omega_{d\acute{e}placement} = 0.19^{\circ}/s \ (> 0.18^{\circ}/s)$	non respectée
Exigence 1.2	Temps de déplacement < 1 min	$t_{d\'eplacement} = 49 s (< 1 min)$	respectée

Question 5 Défaut maximal de position relatif entre les deux chariots dans le cas réel présenté figure 10. Conclusion.

L'écart de position entre les deux voiles sera de $3,651-3,633=0,018 \, m>0,015 \, m$ donc l'exigence **Id 1.5** n'est **pas respectée**.

La perturbation du vent a donc une influence sur la précision du système donc l'exigence **Id 1.4 non respectée**.

III - Étude de la commande en vitesse d'un chariot central en boucle fermée

III.1 - Modélisation dynamique de la voile

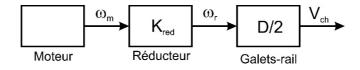
III.1.a - Modélisation de la transmission mécanique

Question 6 Expression de la vitesse de déplacement de la demi-voile V_{ch} en fonction de ω_m , de D et de K_{red} .

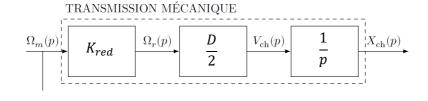
En supposant les liaisons sans jeux et <u>les liaisons entre les galets et le rail circulaire sans glissement</u>, on a alors :

$$V_{ch} = \omega_r \cdot \frac{D}{2} = K_{red} \cdot \omega_m \cdot \frac{D}{2}$$

Chaîne de transmission:



Question 7 Fonctions de transfert de la zone « Transmission mécanique » du schéma-bloc sur la figure B du document réponse.



III.1.b - Modélisation des perturbations

III.1.b.i - Détermination de l'effort du vent sur la demi-voile

Question 8 Effort élémentaire du vent sur la demi-voile s'appliquant au point P sur la surface dS, noté d \vec{F}_{vent} .

Par définition
$$d\vec{F}_{\text{vent}} = \vec{f}_{\text{vent}} dS = f dS \vec{u} \Rightarrow d\vec{F}_{\text{vent}} = f \mathbf{R}^2 \sin(\theta) \cdot d\theta \cdot d\phi \cdot \vec{u}$$

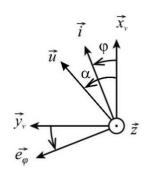
Question 9 Définition de $\vec{M}_{O \text{ vent}}$, moment résultant de l'action mécanique du vent au point O, en fonction de l'effort élémentaire du vent d \vec{F}_{vent} s'appliquant au point P.

$$\overrightarrow{M}_{O \text{ vent}} = \int \overrightarrow{OP} \wedge d\overrightarrow{F}_{\text{vent}}$$

Expression du moment de l'action mécanique du vent selon l'axe $(0, \vec{z})$, $\vec{M}_{0 \text{ vent}} \cdot \vec{z}$ s'opposant à la rotation de la voile autour de l'axe $(0, \vec{z})$ en fonction de R, f et α .

$$(\overrightarrow{OP} \wedge d\vec{F}_{\text{vent}}) \cdot \vec{z} = (R \wedge f dS\vec{u}) \cdot \vec{z} = R. f dS \left(\underbrace{\vec{z} \wedge \overrightarrow{e_r}}_{sin(\theta).\overrightarrow{e_{\varphi}}}\right) \cdot \vec{u}$$

Or $\overrightarrow{e_{\varphi}} \cdot \overrightarrow{u} = sin(\alpha - \varphi)$ (Faire un dessin !!)

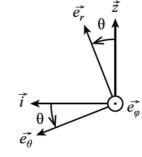


$$(\overrightarrow{OP} \wedge d\vec{F}_{\text{vent}}) \cdot \vec{z} = \text{R.} f. sin(\theta). sin(\alpha - \varphi). dS$$

$$(\overrightarrow{OP} \wedge d\vec{F}_{\text{vent}}) \cdot \vec{z} = \text{R.} f. \sin(\theta). \sin(\alpha - \varphi). \text{R}^2 \sin(\theta). d\theta. d\varphi$$

Donc

$$\vec{M}_{O \text{ vent}} \cdot \vec{z} = \int_{\varphi = -\pi/8}^{\pi/8} \int_{\theta = 0}^{\pi/2} (R^3 f \sin^2 \theta \cdot \sin(\alpha - \varphi)) d\theta d\varphi$$



$$=R^3f\int\limits_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\theta\,\mathrm{d}\theta\int\limits_{\varphi=-\frac{\pi}{8}}^{\frac{\pi}{8}}\sin(\alpha-\varphi)\mathrm{d}\varphi=R^3f\underbrace{\left[\frac{\theta}{2}-\frac{\sin2\theta}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}}_{\frac{\pi}{4}}\underbrace{\left[\cos(\alpha-\varphi)\right]_{-\frac{\pi}{8}}^{\frac{\pi}{8}}}_{2.\sin\alpha.\sin\frac{\pi}{8}}\left(\sin^2\theta=\frac{1}{2}-\frac{\cos2\theta}{2}\right)$$

$$\overrightarrow{M}_{0 \text{ vent}} \cdot \overrightarrow{z} = R^3 f \frac{\pi}{2} \cdot \sin \frac{\pi}{8} \cdot \sin \alpha$$

Commentaires:

On ne connait pas le centre de poussée (= point d'application de la résultante)

$$\overrightarrow{M}_{O \text{ vent}} \neq \overrightarrow{OP} \wedge \int d\overrightarrow{F}_{\text{vent}}$$

Question 10 Expression de F_{vent} l'effort du vent au point C_G s'opposant au déplacement du chariot central.

$$(\overrightarrow{OC_G} \wedge F_{\text{vent}} \overrightarrow{x_{C_G}}) \cdot \vec{z} = \overrightarrow{M_O}_{\text{vent}} \cdot \vec{z} \iff (R. \overrightarrow{y_{C_G}} \wedge F_{\text{vent}} \overrightarrow{x_{C_G}}) \cdot \vec{z} = R^3 f \frac{\pi}{2}. \sin \frac{\pi}{8}. \sin \alpha$$

$$\Leftrightarrow -R.F_{\text{vent}} = R^3 f \frac{\pi}{2} \cdot \sin \frac{\pi}{8} \cdot \sin \alpha \iff \boxed{F_{\text{vent}} = -R^2 f \frac{\pi}{2} \cdot \sin \frac{\pi}{8} \cdot \sin \alpha}$$

Question 11 Valeur de α tel que $|F_{\text{vent}}|$ soit maximal et valeur maximale de $|F_{\text{vent}}|$.

Cet effort est maximal pour $\alpha = \pm \frac{\pi}{2}$, on alors $|F_{\text{vent}}| = R^2 f \frac{\pi}{2} \sin \frac{\pi}{8}$

A.N.
$$|F_{\text{vent}}| = 22,750^2.54,7.\frac{\pi}{2}.\sin\frac{\pi}{8} = 17 \text{ kN}$$

III.1.b.ii - Détermination du moment de résistance au roulement des galets sur le rail

Question 12 Expression de $F_I + F_I$.

On isole cc = {chariot central + galets de roulement}

BAME (Bilan des Actions Mécaniques Extérieures):

- $\{\tau_{pes \to cc}\} = \begin{Bmatrix} -m_{cc}. g. \vec{z} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_{G \text{ ou } F}$
- $\bullet \quad \{\tau_{r \to cc}^I\} = \begin{Bmatrix} F_I \cdot \vec{z} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_I$
- $\bullet \quad \{\tau_{r\to cc}^J\} = \left\{\begin{matrix} F_J \cdot \vec{z} \\ \vec{0} \end{matrix}\right\}_I$
- $\bullet \quad \{\tau_{v \to cc}\} = \left\{ -\frac{m_v}{2} \cdot g \cdot \vec{z} \right\}_{F \text{ ou } G}$

Commentaires:

Ne pas dire trop vite qu'un solide est en équilibre, la résultante dynamique peut s'annuler pour d'autres raisons : mouvement particulier, masse négligée.

On applique le théorème de la résultante dynamique en projection suivant \vec{z} à l'ensemble **en mouvement de translation** (rectiligne uniforme) selon $\overrightarrow{x_{C_G}}$ par rapport au référentiel lié au sol galiléen :

$$m_{cc}.\overrightarrow{a_{G_{cc/Rg}}}\cdot\vec{z}=0=\sum\vec{F}_{ext\to cc}\cdot\vec{z}\Leftrightarrow -\frac{m_v}{2}.g-m_{cc}.g+F_I+F_J=0\Leftrightarrow \boxed{\pmb{F}_I+\pmb{F}_J=\left(\frac{\pmb{m}_v}{\pmb{2}}+\pmb{m}_{cc}\right)g}$$

Question 13 Expression du moment de résistance au roulement en C, noté \vec{M}_C , en fonction de F_I et δ .

$$\overrightarrow{M}_C = \overrightarrow{M}_I + \overrightarrow{CI} \wedge F_I \overrightarrow{z} = -\delta. F_I. \overrightarrow{y_{C_G}}$$

5

Question 14 Expressions de \vec{M}_D en fonction de F_J et δ , et du moment de résistance au roulement du chariot central $\vec{M}_{cc} = \vec{M}_C + \vec{M}_D$ en fonction de δ , m_v , m_{cc} et g.

Par analogie $\overrightarrow{M}_D = \overrightarrow{DI} \wedge F_J \overrightarrow{z} = -\delta \cdot F_J \cdot \overrightarrow{y_{C_G}}$

Et
$$\vec{M}_{cc} = \vec{M}_C + \vec{M}_D = -\delta(F_I + F_J) \overrightarrow{y_{C_G}} \Rightarrow \overrightarrow{M}_{cc} = -\delta g \left(\frac{m_v}{2} + m_{cc}\right) \overrightarrow{y_{C_G}}$$

Question 15 Moment de résistance au roulement des galets de roulement du chariot latéral, noté \vec{M}_{cl} et moment de résistance au roulement total des galets de roulement, \vec{M}_{glob} . Application numérique.

Le chariot latéral a exactement la même géométrie et les mêmes actions mécaniques, seul le poids du chariot change donc :

$$\overrightarrow{M}_{cl} = -\delta g \left(\frac{m_v}{2} + m_{cl} \right) \overrightarrow{y_{C_G}}$$

On en déduit:

$$\overrightarrow{M}_{\mathrm{glob}} = \overrightarrow{M}_{cc} + \overrightarrow{M}_{cl} = -\delta g(m_v + m_{cc} + m_{cl})\overrightarrow{y_{C_G}}$$

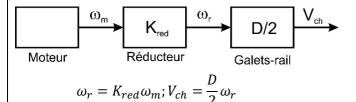
AN: $\|\vec{M}_{\text{glob}}\| = 0.005 \times 9.81(120\ 000 + 15\ 000 + 8\ 000) = 7014\ N.\ m$

$$\|\overrightarrow{M}_{\text{glob}}\| = 7014 \, N. \, m$$

III.1.c - Détermination de l'inertie équivalente de la partie mobile

Question 16 Expression littérale de l'inertie équivalente, J_{eq} , de l'ensemble mobile E rapporté sur l'arbre moteur telle que : $E_c = \frac{1}{2}J_{eq}\omega_m^2$

On rappelle la chaîne de transmission :



Commentaires:

Ne pas confondre diamètre et rayon...

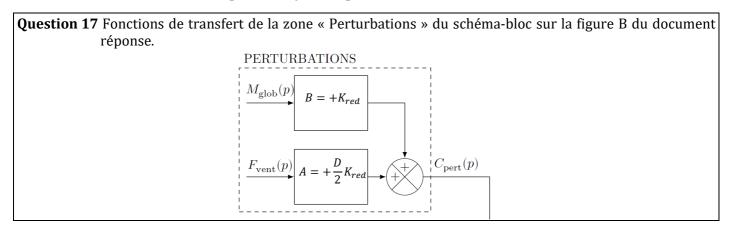
On a alors:

$$E_c = \frac{1}{2}(m_v + m_{cc} + m_{cl})V_{ch}^2 + J_g\omega_r^2 + J_{mr}\omega_m^2 = \frac{1}{2}\left((m_v + m_{cc} + m_{cl})\frac{D^2}{4}K_{red}^2 + 2J_gK_{red}^2 + 2J_{mr}\right)\omega_m^2$$

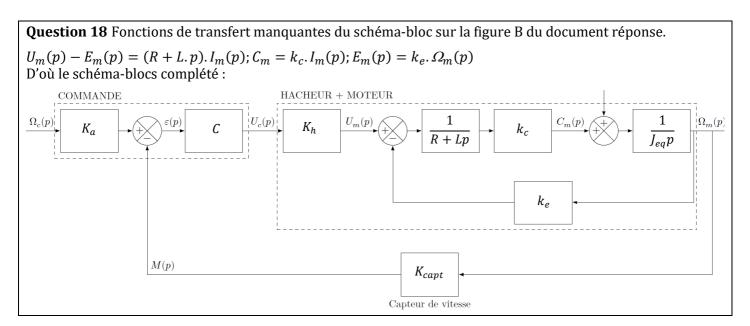
Donc:

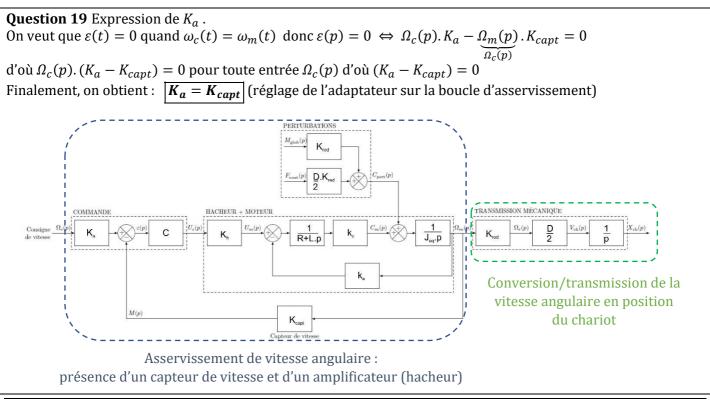
$$J_{eq} = (m_v + m_{cc} + m_{cl}) \frac{D^2}{4} K_{red}^2 + 2J_g K_{red}^2 + 2J_{mr}$$

III.1.d - Détermination de l'équation dynamique de la voile

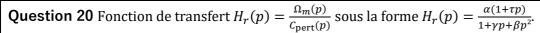


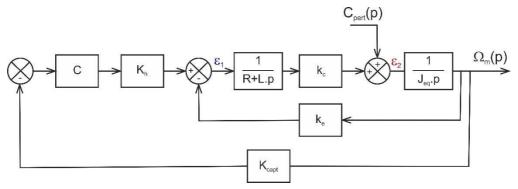
III.2 - Modélisation de la commande en vitesse d'un chariot central en boucle fermée





III.3 - Étude des performances de la boucle de vitesse non corrigée





Méthode « des epsilons »

$$\varepsilon_{1}(p) = -K_{capt} \cdot C \cdot K_{h} \cdot \Omega_{m}(p) - k_{e} \cdot \Omega_{m}(p)$$

$$\varepsilon_{2}(p) = \frac{k_{c}}{R + L \cdot p} \varepsilon_{1}(p) + C_{pert}(p)$$
1

$$\Omega_m(p) = \frac{1}{J_{eq} \cdot p} \cdot \varepsilon_2(p)$$

Soit
$$\Omega_m(p) = \frac{1}{J_{eq} \cdot p} \left[\frac{k_c}{R + L \cdot p} \left[-K_{capt} \cdot \mathbf{C} \cdot K_h \cdot \Omega_m(p) - k_e \cdot \Omega_m(p) \right] + C_{pert}(p) \right]$$

$$\left[J_{eq}.\,p.\,(R+L.\,p)+k_c.\,(K_{capt}.\,\mathsf{C}.\,K_h+k_e)\right].\,\Omega_m(p)=(R+L.\,p).\,C_{pert}(p)$$

$$H_r(p) = \frac{\Omega_m(p)}{C_{\text{pert}}(p)} = \frac{R + Lp}{J_{eq}p(R + Lp) + k_c(K_{capt}.C.K_h + k_e)}$$

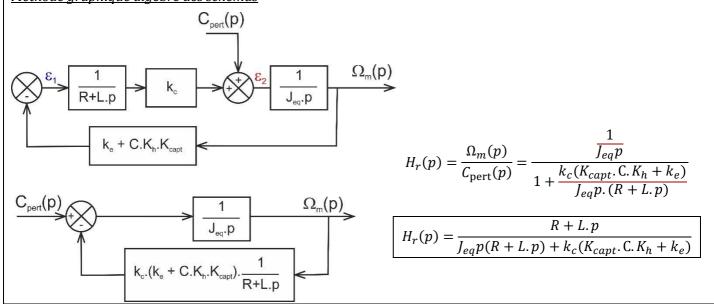
Soit sous forme canonique avec C=1:

$$H_r(p) = -\frac{-R}{k_c(K_{capt}.K_h + k_e)} \frac{1 + \frac{L}{R}p}{1 + \frac{J_{eq}R}{k_c(K_{capt}.K_h + k_e)}p + \frac{J_{eq}L}{k_c(K_{capt}.K_h + k_e)}p^2}$$

On a donc:

$$\boxed{\alpha = \frac{-R}{k_c(k_{capt}k_h + k_e)}; \boxed{\tau = \frac{L}{R}}; \boxed{\gamma = \frac{J_{eq}R}{k_c(k_e + k_{capt}k_h)}}; \boxed{\beta = \frac{J_{eq}L}{k_c(k_e + k_{capt}k_h)}}$$

Méthode graphique algèbre des schémas



Question 21 Variation de vitesse du moteur, en régime permanent, sous l'effet d'un couple de perturbation $C_{pert}(t) = C_0 u(t)$ avec u(t) l'échelon de Heaviside. Conclusion.

La consigne $\omega_c(t)$ étant nulle, on calcule la valeur finale de $\omega_m(t)$ ou l'erreur statique :

$$\omega_{m_{\infty}} = \lim_{t \to \infty} (\omega_m(t)) = \lim_{p \to 0} p\Omega_m(p) = \lim_{p \to 0} pH_r(p)C_{\text{pert}}(p) = \lim_{p \to 0} p\frac{\alpha(1+\tau p)}{1+\gamma p+\delta p^2} \frac{C_0}{p}$$
$$\boxed{\omega_{m_{\infty}} = \alpha. C_0 \neq 0}$$

ou

$$E_{rs} = \lim_{t \to \infty} \left(\underbrace{\omega_c(t)}_{0} - \omega_m(t) \right) = \lim_{p \to 0} -p\Omega_m(p) = \lim_{p \to 0} -pH_r(p)C_{\text{pert}}(p) = \lim_{p \to 0} -p\frac{\alpha(1+\tau p)}{1+\gamma p + \delta p^2} \frac{C_0}{p}$$

$$\boxed{E_{rs} = -\alpha.C_0 \neq 0}$$

La valeur finale de la vitesse n'est pas nulle (ou l'erreur statique pour une consigne nulle) le système est donc sensible à la perturbation. L'exigence 1.4 n'est pas satisfaite.

Commentaires:

On ne veut jamais suivre la perturbation, on veut suivre la consigne!

$$E_{rs} = \lim_{t \to \infty} \left(cons(t) - sortie(t) \right) = \lim_{p \to 0} p. \left(CONS(p) - SORTIE(p) \right)$$

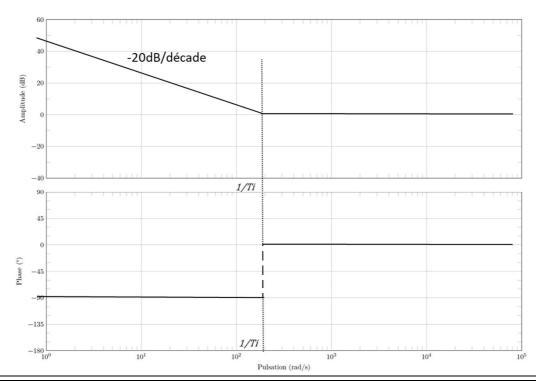
$$dépend de la consigne et de la perturbation$$

III.3.a - Asservissement avec prise en compte des perturbations

Question 22 Diagrammes asymptotiques de Bode en gain et en phase du correcteur $C(p) = C \cdot \frac{1+T_i \cdot p}{T_i \cdot p}$, C = 1.

$$H_{BO}(p) = \frac{1,05}{1 + 5.10^{-3} \cdot p + 1,9.10^{-5} \cdot p^2} \Rightarrow \frac{1}{T_i} = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{1,9.10^{-5}}} = 229.4 \text{ rad/s}$$

On somme un intégrateur et l'inverse d'un premier ordre de cassure $\left| \frac{1}{T_i} \right| = 229.4 \text{ rad/s}$



Question 23 Nouvelle valeur de l'erreur statique. Conclusion vis-àvis de l'exigence 1.4.

En reprenant le calcul de Hr(p) Q20 et en remplaçant C par $C.\frac{1+T_i.p}{T_i.p}$:

$$H_{r}(p) = \frac{\Omega_{m}(p)}{C_{\text{pert}}(p)} = \frac{R + Lp}{\int_{eq} p(R + Lp) + k_{c}(K_{capt}.C.\frac{1 + T_{i}.p}{T_{i}.p}.K_{h} + k_{e})} \underbrace{P \to 0} \frac{R}{k_{c}(K_{capt}.C.\frac{1}{T_{i}.p}.K_{h} + k_{e})}$$

$$E_{rs} = \lim_{p \to 0} -p\Omega_{m}(p) = \lim_{p \to 0} -pH_{r}(p)C_{\text{pert}}(p) = \lim_{p \to 0} -p\frac{R}{k_{c}(K_{capt}.C.\frac{1}{T_{i}.p}.K_{h} + k_{e})} \xrightarrow{P} \underbrace{E_{rs} = 0}$$

Le correcteur proportionnel intégral permet de satisfaire l'exigence 1.4 « précision Ers = 0 ».

IV - Conclusion

Question 24 Nécessité de mettre en place une solution de synchronisation pour le déplacement des demi-voiles entre les garages est et ouest.

On remarque que lors d'un déplacement (de 15 min), l'écart relatif entre les deux voiles est de **0,9mm < 15 mm**, ce qui est conforme au cahier des charges.

Cependant, Il y a un risque que **cet écart se cumule** à chaque déplacement, toutes les 15 minutes.

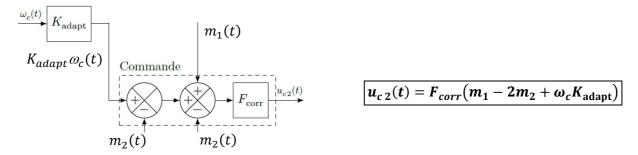
Il y a donc un risque d'obtenir en écart entre les deux voiles de plus de 15 mm au bout de 15 cycles, soit après 4 heures de fonctionnement.

Il semble judicieux de mettre en place une solution de synchronisation pour le déplacement des demi-voiles.

Commentaires: On attend une argumentation, chiffres à l'appui, pas un vague blabla...

Question 25 Expression de $u_{c\,2}(t)$ en fonction de ω_c , m_1 , m_2 , $K_{\rm adapt}$ et $F_{\rm corr}$. Conclusion quant à la correction d'éventuel écart entre les vitesses des deux moteurs.

Par lecture du schéma-blocs de la commande :



En cas de vitesse identique entre les deux moteurs $\omega_{m2} = \omega_c$, les mesures $m_1 = m_2$, le second sommateur du moteur 2 n'a aucune influence et la commande du moteur 2 n'est donc pas modifiée.

Si la vitesse de rotation du second moteur est plus faible $\omega_{m2} < \omega_c$:

- le chariot 2 est en retard sur le chariot 1
- $\omega_c K_{\text{adapt}} m_2 > 0$ et $m_1 > m_2$
- \rightarrow le signal de sortie du second sommateur sera augmenté, ce qui va monter la consigne $u_{c\,2}$ du moteur 2 ;
- → la vitesse du moteur 2 va alors augmenter jusqu'à redevenir égal à celle du moteur 1.

Si la vitesse de rotation du second moteur est plus grande $\omega_{m2} > \omega_c$:

- le chariot 2 est en avance sur le chariot 1
- $\omega_c K_{\text{adapt}} m_2 < 0 \text{ et } m_1 < m_2$
- ightarrow le signal de sortie du second sommateur sera diminué, ce qui va baisser la consigne $u_{c\,2}$ du moteur 2 ;
- → la vitesse du moteur 2 va alors diminuer jusqu'à redevenir égal à celle du moteur 1.

<u>Conclusion</u>: Le schéma de synchronisation proposé permet de corriger correctement le système en cas d'écart entre les vitesses des deux moteurs.

Commentaires:

On attend une **argumentation** en fonction des différents cas qui peuvent se présenter et une **conclusion**!