Vision en réalité augmentée pour hélicoptère CORRIGÉ (d'après Centrale PSI 2014)

2. Influence du déport de masse lié à la variation de position des optiques

__Objectif__ : Valider l'hypothèse simplificatrice « les effets aérodynamiques et la variation de position du centre d'inertie de la charge n'influent pas sur les performances du FLIR. »

Question 1. ***Justifier*** *la forme des matrices d'inertie* $\boldsymbol{I}_{(P,cyl)}$ *et* $\boldsymbol{I}_{(P_0,o)}$. ***Déterminer*** *littéralement l'opérateur d'inertie* $\boldsymbol{I}_{(P,fe)}$ *de l'étage fin d'élévation en fonction de* $Acyl$, $Bcyl$, Ao, Bo, d *et* mo *dans le repère* R_e, *puis* ***exprimer*** *le vecteur* $\overrightarrow{PG_{fe}}$, *dans le repère* R_e *en fonction de* m_{cyl}, m_O *et* d.

$$\mathbf{I}_{(P,cyl)} = \begin{bmatrix} Acyl & 0 & 0 \\ 0 & Bcyl & 0 \\ 0 & 0 & Acyl \end{bmatrix}_{(P,\overrightarrow{x_e},\overrightarrow{y_e},\overrightarrow{z_e})}$$ le cylindre plein possède *l'axe de symétrie matérielle* $(P,\overrightarrow{y_e})$

$$\mathbf{I}_{(P_0,o)} = \begin{bmatrix} A_0 & 0 & 0 \\ 0 & B_0 & 0 \\ 0 & 0 & B_0 \end{bmatrix}_{(P_0,\overrightarrow{x_e},\overrightarrow{y_e},\overrightarrow{z_e})}$$ l'optique possède __l'axe de symétrie matérielle $(P_0,\overrightarrow{x_e})$__

Pour pouvoir déterminer l'opérateur d'inertie de l'étage fin élévation au point P, on additionne les matrices exprimées toutes deux au point P et dans la même base. Pour cela on applique la relation d'Huygens à l'opérateur de la partie optique entre P_0 (centre de gravité) et le point P avec le vecteur $\overrightarrow{PP_0} = d\overrightarrow{x_e}$. Soit dans la base $(\overrightarrow{x_e},\overrightarrow{y_e},\overrightarrow{z_e})$:

$$I(P,fe) = I(P,cyl) + I(P_0,o) + m_o \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & d^2 & 0 \\ 0 & 0 & d^2 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{I(P,fe) = \begin{bmatrix} A_{cyl} + A_o & 0 & 0 \\ 0 & B_{cyl} + B_o + m_o d^2 & 0 \\ 0 & 0 & A_{cyl} + B_o + m_o d^2 \end{bmatrix}}$$

La position du centre d'inertie noté G_{fe}est donné par la relation : $\boxed{\overrightarrow{PG_{fe}} = \frac{m_o d}{m_o + m_{cyl}}\overrightarrow{x_e}}$ (calcul du barycentre).

La vitesse d'ascension verticale du porteur est $\overrightarrow{V_{P,porteur/R0}} = v(t).\overrightarrow{Z_0}$ et son accélération est $\overrightarrow{\Gamma_{P,porteur/R0}} = \gamma(t).\overrightarrow{Z_0}$.

Question 2. ***Exprimer*** $\overrightarrow{V_{G_{fe},fe/R_0}}$ *dans le repère* R_0, *vecteur vitesse du point* G_{fe}, *centre d'inertie de l'étage fin d'élévation dans son mouvement par rapport à* R_0, *en fonction de* $v(t)$, m_{cyl}, m_O, d, $\theta_{e0}(t)$ *et* $\dot{\theta}_{e0}(t)$.

$\overrightarrow{V_{G_{fe},fe/R_0}} = \overrightarrow{V_{P,fe/R_0}} + \overrightarrow{\Omega_{fe/R_0}} \wedge \overrightarrow{PG_{fe}}$. Une relation de composition de mouvement conduit à :
$\overrightarrow{V_{P,porteur/R_0}} = \overrightarrow{V_{P,porteur/axe}} + \overrightarrow{V_{P,axe\ \ /ge}} + \overrightarrow{V_{P,ge\ \ /fe}} + \overrightarrow{V_{p,fe/R_0}} = \overrightarrow{V_{p,fe/R_0}} = v(t)\overrightarrow{Z_0}$(le point P ayant la particularité de se trouver à l'intersection des axes des deux rotations considérées).

$$\overrightarrow{V_{G_{fe},fe/R_0}} = v(t)\overrightarrow{Z_0} + \dot{\theta_{ea}}(t)\overrightarrow{y_a} \wedge \frac{m_o d}{m_o + m_{cyl}}\overrightarrow{x_e} = v(t)\overrightarrow{Z_0} - \dot{\theta_{ea}}(t)\frac{m_o d}{m_o + m_{cyl}}\overrightarrow{z_e}$$

soit dans la base B0 : $\boxed{\overrightarrow{V_{G_{fe},fe/R_0}} = -\dot{\theta_{eo}}(t)\frac{m_o d}{m_o + m_{cyl}}(sin(\theta_{eo}(t))\overrightarrow{X_0} + cos(\theta_{eo}(t)\overrightarrow{Z_0})) + v(t)\overrightarrow{Z_0}}$.

Question 3. *Par application du théorème du moment dynamique et* ***en précisant*** *rigoureusement les étapes de la démarche utilisée,* ***écrire*** *l'équation différentielle régissant le mouvement de l'étage fin d'élévation par rapport au référentiel galiléen* R_0.
La mettre *sous la forme* $\boldsymbol{B}.\ddot{\boldsymbol{\theta}}_{e0}(\boldsymbol{t}) = \boldsymbol{C_m}(\boldsymbol{t}) + \boldsymbol{C_{pert}}(\boldsymbol{t})$.
Donner *sous forme littérale l'expression de* $C_{pert}(t)$, *couple de perturbation issu du déport de masse* d.

Pour établir l'équation différentielle du mouvement de l'étage fin élévation, on applique le theoreme du moment dynamique à l'étage isolé (fe) dans son mouvement par rapport au repère R_0 considéré comme Galiléen.

Bilan des actions extérieures :

- le couple moteur :$\{T_{mot\to fe}\} = \begin{Bmatrix} \overrightarrow{R_{mot\to fe}} = \vec{0} \\ \overrightarrow{M_P} = C_m\overrightarrow{y_e} \end{Bmatrix}$

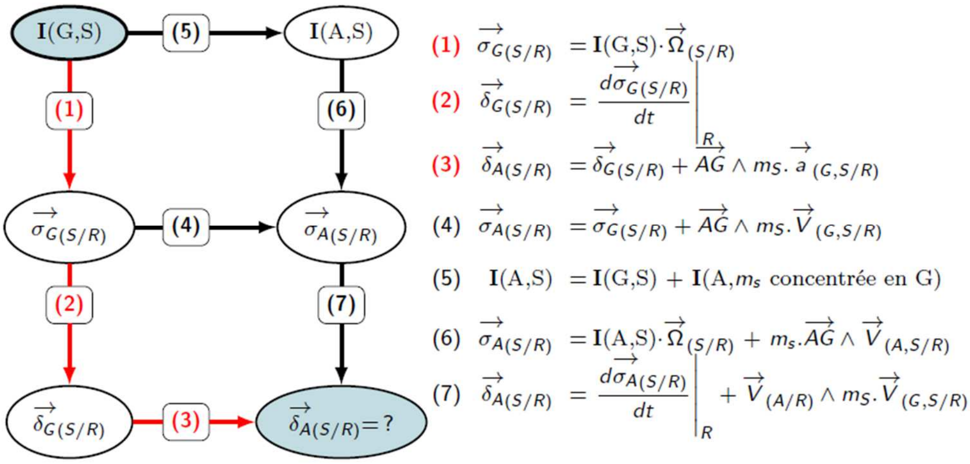
- la gravité : $\{T_{pesanteur\to fe}\} = \begin{Bmatrix} \overrightarrow{R_{pesanteur\to fe}} = -m_{fe}g\overrightarrow{z_a} \\ \overrightarrow{M_P} = \overrightarrow{M_{G_{fe}}} - m_{fe}g\overrightarrow{z_a} \wedge \overrightarrow{G_{fe}P} = m_o d g\cos(\theta_{eo})\overrightarrow{y_e} \end{Bmatrix}$

- l'action de liaison entre l'étage gros d'élévation et fin d'élévation : $\{T_{\text{ge}\to fe}\} = \begin{Bmatrix} \overrightarrow{R_{\text{ge}\to fe}} = X\overrightarrow{x_e} + Y\overrightarrow{y_e} + Z\overrightarrow{z_e} \\ \overrightarrow{M_{P,\text{ge}\to fe}} = L\overrightarrow{x_e} + M\overrightarrow{y_e} \end{Bmatrix}$

L'équation du moment dynamique au point P permet d'écrire :
$\overrightarrow{\delta_{P,fe/R_0}} = \overrightarrow{M_{P,mot\to fe}} + \overrightarrow{M_{P,pesanteur\to fe}} + \overrightarrow{M_{P,\text{ge}\to fe}}$. Il faut donc déterminer l'expression du moment dynamique au point P.

On peut pour cela : (5)->(1)->(2)->(3) ou (6)->(7)

- $I(P, fe) \to I(G_{fe}, fe)$ Huygens(5)
- déterminer le moment cinétique au centre d'inertie $\overrightarrow{\sigma_{G_{fe},fe/R_0}} = I(G_{fe}, fe)(\overrightarrow{\Omega_{fe/R_0}})$ (1),
- en déduire le moment dynamique en ce même point : $\overrightarrow{\delta_{G_{fe},fe/R_0}} = \frac{d\overrightarrow{\sigma_{G_{fe},fe/R_0}}}{dt}\Big|_{R_0}$ (2)
- puis appliquer la relation de champ de torseur : $\overrightarrow{\delta_{P,fe/R_0}} = \overrightarrow{\delta_{G_{fe},fe/R_0}} + m_{fe}\overrightarrow{\Gamma_{G_{fe},fe/R_0}} \wedge \overrightarrow{G_{fe}P}$ (3)



Le vecteur rotation étant porté par $\overrightarrow{y_e}$il suffit de calculer une composante d'inertie dans l'opérateur (avec Huygens) ce qui conduit à $\overrightarrow{\sigma_{G_{fe},fe/R_0}} = (B_{cyl} + B_o + m_o d^2(1 - \frac{m_o}{m_{fe}}))\dot{\theta}_{eo}\overrightarrow{y_e}$.
Cela permet d'obtenir $\overrightarrow{\delta_{G_{fe},fe/R_0}} = \frac{d\overrightarrow{\sigma_{G_{fe},fe/R_0}}}{dt}\Big|_{R_0} = (B_{cyl} + B_o + m_o d^2(1 - \frac{m_o}{m_{fe}}))\ddot{\theta}_{eo}\overrightarrow{y_e}$.

Ayant au préalable calculé le vecteur vitesse du centre d'inertie, on peut par dérivation obtenir le vecteur accélération : $\overrightarrow{\Gamma_{G_{fe},fe/R_0}} = \gamma(t)\overrightarrow{Z_0} - \ddot{\theta}_{ea}(t)\frac{m_o d}{m_o + m_{cyl}}\overrightarrow{z_e} - \dot{\theta}^2{}_{ea}(t)\frac{m_o d}{m_o + m_{cyl}}\overrightarrow{x_e}$ et ainsi déterminer le moment dynamique :
$\boxed{\overrightarrow{\delta_{P,fe/R_0}} = ((B_{cyl} + B_o + m_o d^2)\ddot{\theta}_{eo} - m_o d\gamma(t)\cos(\theta_{eo}))\overrightarrow{y_e}}$.

L'équation différentielle du mouvement s'obtient en prenant la composante de l'équation de moment suivant l'axe $\overrightarrow{y_e}$, soit : $\boxed{(B_{cyl} + B_o + m_o d^2)\ddot{\theta}_{eo} - \gamma(t)m_o d\cos(\theta_{eo}) = C_m + m_o d g\cos(\theta_{eo})}$

On donne les valeurs numériques suivantes : m_o = 1,4 kg; d = 0,01 m; $|\gamma(t)|_{MAXI\ NH90}$ = 1,8 g, avec $g \approx$ 9,81 $m.s^{-2}$. Pour l'étage fin d'élévation, le couple moteur maximal est voisin de 3 N·m.

***Question 4.** Dans la phase de vol étudiée, **calculer** la valeur numérique maximale de C_{pert}, notée $C_{pertMAXI}$, dans le cas le plus défavorable. **Conclure** sur la pertinence de la prise en compte de cette perturbation pour la conception de la commande de l'étage fin d'élévation.*

Le couple perturbateur dû au déport de masse contient le terme de gravité ainsi que le terme d'accélération soit $\boxed{C_{pert} = \gamma(t)m_o d\cos(\theta_{eo}) + m_o d g\cos(\theta_{eo})}$.
Les conditions les plus défavorables sont quant le terme en cosinus vaut 1 soit après application numérique : $\boxed{C_{pert} = 1{,}4 \times 0{,}01 \times 9{,}81 \times (1 + 1{,}8) \approx 0{,}385 N.m}$.
Cela reste de l'ordre du dixième du couple moteur proposé$\approx 3N.m$, on peut donc le considérer comme négligeable.