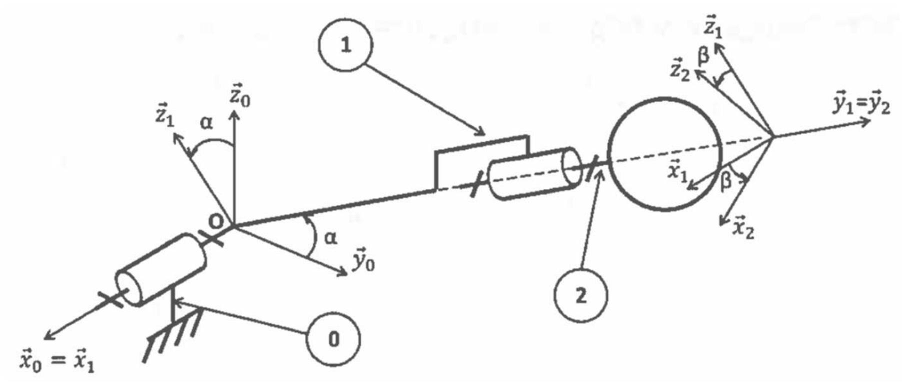
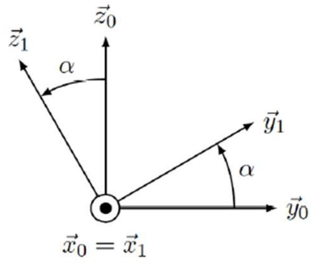
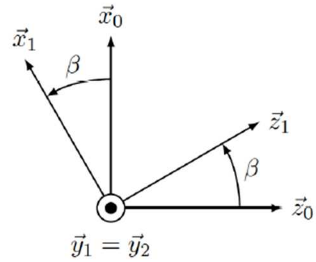
Robot Kuka (d'après ICNA 2017) – CORRIGÉ partie C







- bâti (**0**) :
  - $R_0(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ le repère galiléen associé au bâti (**0**) ;
  - O est le point d'intersection des axes des deux liaisons pivots L_{01} et L_{12}.
- bras (**1**) :
  - $R_1(O, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ le repère associé au bras (**1**) ;
  - $(\vec{y}_0, \vec{y}_1) = (\vec{z}_0, \vec{z}_1) = \alpha(t)$;
  - de masse m_1 et de centre de gravité G_1 tel que $\overrightarrow{OG_1} = l_1 \vec{y}_1$;
  - de matrice d'inertie $\mathbb{I}(G_1, 1)$ exprimée dans la base $\mathcal{B}_1$: $\mathbb{I}(G_1, 1) = \begin{bmatrix} A_1 & 0 & -E_1 \\ 0 & B_1 & 0 \\ -E_1 & 0 & C_1 \end{bmatrix}_{\mathcal{B}_1}$
- nacelle (**2**) :
  - $R_2(O, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$ le repère associé à la nacelle (**2**) ;
  - $(\vec{x}_1, \vec{x}_2) = (\vec{z}_1, \vec{z}_2) = \beta(t)$;
  - de masse m_2 et de centre de gravité G_2 tel que $\overrightarrow{OG_2} = l_2 \vec{y}_1$;
  - de matrice d'inertie $\mathbb{I}(G_2, 2)$ exprimée dans la base $\mathcal{B}_2$: $\mathbb{I}(G_2, 2) = \begin{bmatrix} A_2 & 0 & 0 \\ 0 & B_2 & 0 \\ 0 & 0 & C_2 \end{bmatrix}_{\mathcal{B}_2}$

On note (**E**) l'ensemble des parties du robot en mouvement : E={1+2}. Les liaisons sont toutes supposées parfaites et motorisées. Le bras (**1**) est supposé accélérer selon l'axe de la liaison pivot entre (**0**) et (**1**), tandis que la nacelle (**2**) tourne à vitesse angulaire constante selon l'axe de la liaison (**1**) et (**2**). On suppose donc $\ddot{\alpha} \neq 0$ et $\ddot{\beta} = 0$.

C- Détails du calcul de $\vec{\delta}_{O,}(E/0)$: cinétique

*Q7. **Quelle** hypothèse a été formulée pour que la matrice d'inertie du bras (1) en son centre de gravité G_1 exprimée dans la base B1 s'écrive : $\boldsymbol{I}(G_1, 1) = \begin{bmatrix} A_1 & 0 & -E_1 \\ 0 & B_1 & 0 \\ -E_1 & 0 & C_1 \end{bmatrix}_{B1}$?*

$D_1 = \int yz.dm = 0$ et $F_1 = \int xy.dm = 0$ donc le bras (1) admet le plan $(G_1, \vec{x_1}, \vec{z_1})$ comme plan de symétrie matérielle.

*Q8. **Calculer** La matrice d'inertie du bras (1) au point O notée $\boldsymbol{I}(O, 1)$ dans la base B1.*

Th de Huygens : $\mathbf{I}(O, 1) = \mathbf{I}(G_1, 1) + \mathbf{I}(O, masse\ m_1\ concentrée\ en\ G_1)$

Avec $\overrightarrow{OG_1} = l_1.\overrightarrow{y_1}$: $\mathbf{I}(O, masse\ m_1\ concentrée\ en\ G_1) = m_1 \begin{bmatrix} l_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & l_1^2 \end{bmatrix}_{B1}$

$$\boxed{\mathbf{I}(\mathbf{O},\mathbf{1}) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A_1 + m_1.l_1^2} & \mathbf{0} & \boldsymbol{-E_1} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{B_1} & \mathbf{0} \\ \boldsymbol{-E_1} & \mathbf{0} & \boldsymbol{C_1 + m_1.l_1^2} \end{bmatrix}_{\boldsymbol{B1}}}$$

Pour la suite, on considère que la matrice d'inertie du bras (1) en O et dans la base B1 s'écrit :

$$\mathbf{I}(O,1) = \begin{bmatrix} A'_1 & 0 & -E'_1 \\ 0 & B'_1 & 0 \\ -E'_1 & 0 & C'_1 \end{bmatrix}_{B1}$$

Q9. ***Exprimer*** *le moment cinétique du bras (1) dans son mouvement par rapport à (0) au point O dans la base B1, noté* $\vec{\sigma}_{O,(1/0)}$.

$$\vec{\sigma}_{O,(1/0)} = \boldsymbol{I}(O,1).\overrightarrow{\Omega(1/0)}\ \ car\ \ \overrightarrow{V(O,1/0)} = \vec{0}$$

$$\overrightarrow{\Omega(1/0)} = \dot{\alpha}.\overrightarrow{x_{01}} \Rightarrow \boxed{\vec{\boldsymbol{\sigma}}_{\mathbf{O},(\mathbf{1}/\mathbf{0})} = \boldsymbol{A'_1\dot{\alpha}.\overrightarrow{x_{01}} - E'_1\dot{\alpha}.\overrightarrow{z_1}}}$$

On considère que la matrice d'inertie de la nacelle (2) en G_2 dans la base B1 s'écrit :

$$\mathbf{I}(G_2,2) = \begin{bmatrix} A_2.\cos^2\beta + C_2.\sin^2\beta & 0 & (C_2 - A_2).\cos\beta.\sin\beta \\ 0 & B_2 & 0 \\ (C_2 - A_2).\cos\beta.\sin\beta & 0 & A_2.\sin^2\beta + C_2.\cos^2\beta \end{bmatrix}_{B1}$$

Q10. **Exprimer** le moment cinétique de (2) dans son mouvement par rapport à (0) au point O dans la base B1 noté $\vec{\sigma}_{O,(2/0)}$.

$$\vec{\sigma}_{O,(2/0)} = \vec{\sigma}_{G2,(2/0)} + \overrightarrow{OG_2} \wedge m_2\,\overrightarrow{V_{G2,2/0}}$$

Avec $\vec{\sigma}_{G,(2/0)} = \mathbf{I}(G_2,2).\overrightarrow{\Omega(2/0)}$

$$= \begin{bmatrix} A_2.\cos^2\beta + C_2.\sin^2\beta & 0 & (C_2 - A_2).\cos\beta.\sin\beta \\ 0 & B_2 & 0 \\ (C_2 - A_2).\cos\beta.\sin\beta & 0 & A_2.\sin^2\beta + C_2.\cos^2\beta \end{bmatrix}_{B1} \begin{bmatrix} \dot{\alpha} \\ \dot{\beta} \\ 0 \end{bmatrix}_{B1}$$

$$= \begin{bmatrix} (A_2.\cos^2\beta + C_2.\sin^2\beta).\dot{\alpha} \\ B_2.\dot{\beta} \\ [(C_2 - A_2).\cos\beta.\sin\beta].\dot{\alpha} \end{bmatrix}_{B1}$$

$$\overrightarrow{V_{G2,2/0}} = \left.\frac{d\overrightarrow{OG_2}}{dt}\right|_{R_0} = l_2.\dot{\alpha}.\overrightarrow{z_1}$$

$$\overrightarrow{OG_2} \wedge m_2\,\overrightarrow{V_{G2,2/0}} = m_2 l_2\,\overrightarrow{y_1} \wedge l_2.\dot{\alpha}.\overrightarrow{z_1} = m_2.l_2^2.\dot{\alpha}.\overrightarrow{x_1}$$

$$\boxed{\vec{\boldsymbol{\sigma}}_{\mathbf{O},(\mathbf{2}/\mathbf{0})} = \left(\boldsymbol{A_2.\cos^2\beta + C_2.\sin^2\beta + m_2.l_2^2}\right).\boldsymbol{\dot{\alpha}.\overrightarrow{x_1} + B_2.\dot{\beta}.\overrightarrow{y_1}} + [\boldsymbol{(C_2 - A_2).\cos\beta.\sin\beta}].\boldsymbol{\dot{\alpha}.\overrightarrow{z_1}}}$$

Q11. **En déduire** le torseur cinétique de l'ensemble (E) par rapport à (0) au point O noté $\{C_{(E/0)}\}$.

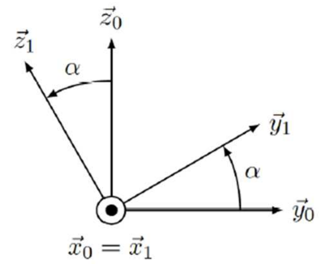
(E)={1+2} : $\vec{R}_{(E/0)} = \vec{R}_{(1/0)} + \vec{R}_{(2/0)}$ et $\vec{\sigma}_{O,(E/0)} = \vec{\sigma}_{O,(1/0)} + \vec{\sigma}_{O,(2/0)}$

$\vec{R}_{(E/0)} = m_1.\overrightarrow{V_{G_1,1/0}} + m_2.\overrightarrow{V_{G_2,2/0}} = (m_1.l_1 + m_2.l_2).\dot{\alpha}.\overrightarrow{z_1}$

$\vec{\sigma}_{O,(E/0)} = A'_1\dot{\alpha}.\overrightarrow{x_{01}} - E'_1\dot{\alpha}.\overrightarrow{z_1} + (A_2.\cos^2\beta + C_2.\sin^2\beta + m_2.l_2^2).\dot{\alpha}.\overrightarrow{x_1} + B_2.\dot{\beta}.\overrightarrow{y_1} + [(C_2 - A_2).\cos\beta.\sin\beta].\dot{\alpha}.\overrightarrow{z_1}$

$$\boxed{\{C_{\boldsymbol{E}/\boldsymbol{0}}\} = \begin{Bmatrix} (\boldsymbol{m_1.l_1 + m_2.l_2}).\boldsymbol{\dot{\alpha}.\overrightarrow{z_1}} \\ (\boldsymbol{A'_1 + A_2.\cos^2\beta + C_2.\sin^2\beta + m_2.l_2^2}).\boldsymbol{\dot{\alpha}.\overrightarrow{x_{01}} + B_2.\dot{\beta}.\overrightarrow{y_1}} + [(\boldsymbol{C_2 - A_2}).\boldsymbol{\cos\beta.\sin\beta - E'_1}].\boldsymbol{\dot{\alpha}.\overrightarrow{z_1}} \end{Bmatrix}_{\boldsymbol{O}}}$$

Q12. **Calculer** le moment dynamique en O de (E) dans son mouvement par rapport à (0) : $\vec{\delta}_O,(E/0)$, en déduire les expressions de $\mu_0, \mu_1, \rho_0, \eta_0, \eta_1$ en fonction des moments et produits d'inertie des solide 1 et 2 et de l'angle β.



$\vec{\delta}_O,(E/0) = \left.\frac{d\vec{\sigma}_{O,(E/0)}}{dt}\right|_{R0}$ car $\overrightarrow{V_{O/R0}} = \vec{0}$ avec $\left.\frac{d\overrightarrow{y_1}}{dt}\right|_{R0} = \dot{\alpha}.\overrightarrow{z_1}$ et $\left.\frac{d\overrightarrow{z_1}}{dt}\right|_{R0} = -\dot{\alpha}.\overrightarrow{y_1}$

$$\boldsymbol{\vec{\delta}_0,(E/0)\cdot\overrightarrow{x_{01}} = \left(A'_1 + A_2.\cos^2\beta + C_2.\sin^2\beta + m_2.l_2^2\right).\ddot{\alpha} + \left(-2A_2.\dot{\beta}\cos\beta\sin\beta + 2.C_2.\dot{\beta}\cos\beta\sin\beta\right).\dot{\alpha}}$$
$$\boldsymbol{\vec{\delta}_0,(E/0)\cdot\overrightarrow{y_1} = B_2.\ddot{\beta} - [(C_2 - A_2).\cos\beta.\sin\beta - E'_1].\dot{\alpha}^2}$$
$$\boldsymbol{\vec{\delta}_0,(E/0)\cdot\overrightarrow{z_1} = [(C_2 - A_2).\cos\beta.\sin\beta - E'_1].\ddot{\alpha} + B_2.\dot{\beta}.\dot{\alpha}}$$