Dynamique des Systèmes Mécaniques
Théorèmes Généraux

Spé MP–MP* 2025-2026

Lycée Thiers Marseille

1 - Problématique et hypothèses

Objectif :

Relier le **mouvement d'un ensemble matériel** et les **actions mécaniques qui lui sont appliquées**, afin :
➢ d'établir les **équations du mouvement** d'un système mécanique (E) connaissant les efforts extérieurs qui lui sont appliqués, ou
➢ de déterminer des **actions mécaniques inconnues** (notamment celles développées par les actionneurs) s'exerçant sur le système (E), son mouvement étant imposé.

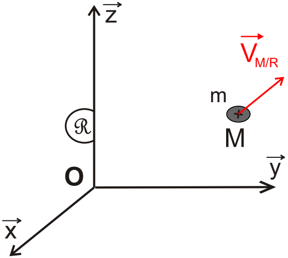
Hypothèses : solides **indéformables** et à **masse conservative**

- Centre de gravité d'un solide S : $\int_{M \in S} \overrightarrow{GM}.dm = \vec{0}$ ou $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{m_S} \int_{M \in S} \overrightarrow{OM}.dm$
- Principe de conservation de la masse : $\forall t \; m_S(t) = cte$ ou $\frac{dm_S}{dt} = 0$

➢ Conséquence : $\left[\frac{d}{dt} \int_{M \in S} \vec{f}(M,t).dm\right]_{\mathcal{R}} = \int_{M \in S} \left[\frac{d}{dt}\vec{f}(M,t)\right]_{\mathcal{R}}.dm$

$\vec{f}(M,t)$ pouvant être le vecteur position $\overrightarrow{OM}$, le vecteur vitesse $\overrightarrow{V}_{(M,S/\mathcal{R})}$ ...

2 - Dynamique d'une masse ponctuelle



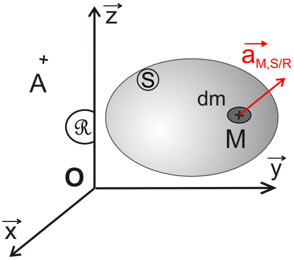
La quantité de mouvement d'un point matériel M lie sa masse m et sa vitesse dans son mouvement par rapport à (R) :

$$\vec{p}_{(M/R)} = m.\vec{V}_{(M/R)}$$

Principe Fondamental de la dynamique pour un point matériel

Il existe au moins un référentiel (espace-temps) galiléen (Rg) tel que, pour tout point matériel M, la variation temporelle de la quantité de mouvement de M par rapport à (Rg) est constamment égale à la résultante des forces appliquées à M :

$$\left.\frac{d\,\vec{p}_{(M/R_g)}}{dt}\right|_{R_g} = m.\vec{a}_{(M/R_g)} = \vec{R}_{(Ext \to M)}$$



$\vec{a}_{(M,S/R)}.dm$: quantité d'accélération élémentaire.

Localement en M :

$$\{d\mathcal{D}_{(S/R)}\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{a}_{(M,S/R)}.dm \\ \vec{0} \end{array} \right\}_M$$

Globalement en A, *l'ensemble des quantités d'accélération du solide (S) dans son mouvement par rapport à (R)* est caractérisé par :

♥ Torseur dynamique

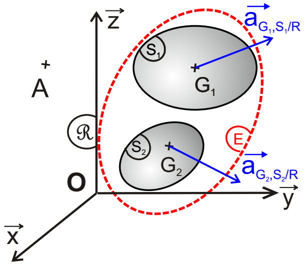
$$\boxed{\{\mathcal{D}_{(S/R)}\} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{R}_{d(S/R)} = \int_{M \in S} \vec{a}_{(M,S/R)} dm \\ \vec{\delta}_{A(S/R)} = \int_{M \in S} \vec{AM} \wedge \vec{a}_{(M,S/R)} dm \end{array} \right\}_A}$$

$\leftarrow$ résultante dynamique de S/R

$\leftarrow$ moment dynamique en A de S/R

$$\boxed{\vec{R}_{d(S/R)} = m_S . \vec{a}_{(G,S/R)}}$$

$$\boxed{\vec{\delta}_{B(S/R)} = \vec{\delta}_{A(S/R)} + \vec{BA} \wedge \vec{R}_{d(S/R)}} \text{ (Varignon)}$$



♥ Ensemble matériel $(E) = S_1 \bigcup S_2$

$$\{\mathcal{D}_{(E/R)}\} = \{\mathcal{D}_{(S_1/R)}\} + \{\mathcal{D}_{(S_2/R)}\}$$

$$\overrightarrow{R}_{d(E/R)} = m_1 . \overrightarrow{a}_{(G_1,S_1/R)} + m_2 . \overrightarrow{a}_{(G_2,S_2/R)}$$

$$\overrightarrow{\delta}_{A(E/R)} = \overrightarrow{\delta}_{A(S_1/R)} + \overrightarrow{\delta}_{A(S_2/R)}$$

♥ ♥ Principe Fondamental de la Dynamique (PFD)

Il existe au moins un espace-temps galiléen (= référentiel R_g) tel que pour tout ensemble matériel (E), le torseur dynamique de (E) dans R_g est constamment égal à la somme des torseurs des actions mécaniques extérieures appliquées à (E) :

$$\boxed{\{\mathcal{D}_{(E/R_g)}\} = \sum \{\mathcal{T}_{(Ext \to E)}\}}$$

Le référentiel terrestre peut être considéré comme galiléen

On notera indifféremment $\{\mathcal{T}_{(Ext \to E)}\}$ ou $\sum \{\mathcal{T}_{(Ext \to E)}\}$,"Ext" représente TOUTES les actions mécaniques extérieures.

4.2 - Dynamique d'un ensemble matériel : Théorèmes Généraux

♥ ♥ ♥ Théorème de la Résultante Dynamique

TRD : $\boxed{m_E.\overrightarrow{a}_{(G,E/R_g)} = \sum m_i.\overrightarrow{a}_{(G_i,S_i/R_g)} = \sum \overrightarrow{R}_{(Ext\rightarrow E)}}$

♥ ♥ ♥ Théorème du Moment Dynamique en A

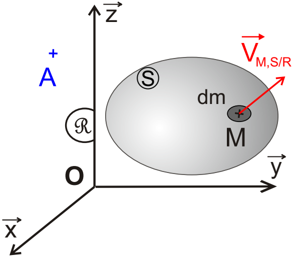
TMD en A : $\boxed{\vec{\delta}_{A(E/R_g)} = \sum \vec{\delta}_{A(S_i/R_g)} = \sum \overrightarrow{M}_{A\ (Ext\rightarrow E)}}$

♥ ♥ ♥ Principe Fondamental de la Statique

- TRS : $\sum \overrightarrow{R}_{(Ext\rightarrow E)} = \overrightarrow{0}$ si $\overrightarrow{a}_{(G,E/R_g)} = \overrightarrow{0}$ ou négligeable ou $m_E = 0$ ou négligeable,
- TMS en A : $\sum \overrightarrow{M}_{A\ (Ext\rightarrow E)} = \overrightarrow{0}$ si $\vec{\delta}_{A(E/R_g)} = \overrightarrow{0}$ ou négligeable.

Le Principe Fondamental de la Dynamique permet de relier :
➢ les actions mécaniques extérieures qui s'exercent sur un système matériel (E), déjà étudiées en STATIQUE
➢ et la CINÉMATIQUE de ce système matériel (E), par rapport à un référentiel, avec prise en compte de la distribution de sa masse (masse+inertie) : **CINÉTIQUE**

5 - Cinétique du solide indéformable



$\vec{V}_{(M,S/R)}.dm$: quantité de mouvement élémentaire.

Localement en M :

$$\{d\mathcal{C}_{(S/R)}\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{V}_{(M,S/R)}.dm \\ \vec{0} \end{array} \right\}_M$$

Globalement en A, *l'ensemble des quantités de mouvement du solide (S) dans son mouvement par rapport à (R)* est caractérisé par :

♥ Torseur cinétique

$$\boxed{\{\mathcal{C}_{(S/R)}\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{R}_{c(S/R)} = \displaystyle\int_{M \in S} \vec{V}_{(M,S/R)}\,dm \\ \vec{\sigma}_{A(S/R)} = \displaystyle\int_{M \in S} \vec{AM} \wedge \vec{V}_{(M,S/R)}\,dm \end{array} \right\}_A}$$

← résultante cinétique de S/R

← moment cinétique en A de S/R

$$\boxed{\vec{R}_{c(S/R)} = m_S.\vec{V}_{(G,S/R)}}$$

$$\boxed{\vec{\sigma}_{B(S/R)} = \vec{\sigma}_{A(S/R)} + \vec{BA} \wedge \vec{R}_{c(S/R)}}$$ (Varignon)

6 - Torseurs Cinétique et Dynamique d'une masse ponctuelle

Soit (S) une masse ponctuelle m placée en G :

$$\{\mathcal{C}_{(S/R)}\}=\left\{\begin{array}{c}\overrightarrow{R}_{c(S/R)} = m.\overrightarrow{V}_{(G/R)} \\ \overrightarrow{\sigma}_{G(S/R)} = \overrightarrow{0}\end{array}\right\}_G \qquad \{\mathcal{D}_{(S/R)}\}=\left\{\begin{array}{c}\overrightarrow{R}_{d(S/R)} = m.\overrightarrow{a}_{(G/R)} \\ \overrightarrow{\delta}_{G(S/R)} = \overrightarrow{0}\end{array}\right\}_G$$

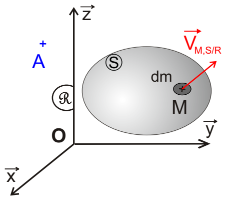
Au point A quelconque :

$$\overrightarrow{\sigma}_{A(S/R)} = \int_{M\in S} \overrightarrow{AG} \wedge \overrightarrow{V}_{(G,S/R)} dm = \overrightarrow{AG} \wedge m.\overrightarrow{V}_{(G,S/R)}$$

$$\overrightarrow{\delta}_{A(S/R)} = \int_{M\in S} \overrightarrow{AG} \wedge \overrightarrow{a}_{(G,S/R)} dm = \overrightarrow{AG} \wedge m.\overrightarrow{a}_{(G,S/R)}$$

L'écriture sous forme de torseur est compatible avec l'écriture du PFD vu en physique.

7.1 Relation entre les éléments des Torseurs Dynamique et Cinétique : Résultantes



Torseur Cinétique

$$\{\mathcal{C}_{(S/R)}\} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{R}_{c(S/R)} = \int_{M\in S} \vec{V}_{(M,S/R)}.dm = m_S.\vec{V}_{(G,S/R)} \\ \vec{\sigma}_{A(S/R)} = \int_{M\in S} \vec{AM} \wedge \vec{V}_{(M,S/R)}.dm \end{array} \right\}_A$$

Torseur Dynamique

$$\{\mathcal{D}_{(S/R)}\} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{R}_{d(S/R)} = \int_{M\in S} \vec{a}_{(M,S/R)}.dm = m_S.\vec{a}_{(G,S/R)} \\ \vec{\delta}_{A(S/R)} = \int_{M\in S} \vec{AM} \wedge \vec{a}_{(M,S/R)}.dm \end{array} \right\}_A$$

$\Rightarrow$ Relation entre $\vec{R}_{d(S/R)}$ et $\vec{R}_{c(S/R)}$

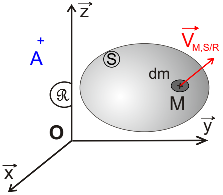
$$\boldsymbol{\vec{R}_{d(S/R)} = \left.\frac{d\vec{R}_{c(S/R)}}{dt}\right|_R}$$

Idée : Dériver $\vec{\sigma}_{A(S/R)}$ afin de trouver une relation avec $\vec{\delta}_{A(S/R)}$

$$\left.\frac{d\vec{\sigma}_{A(S/R)}}{dt}\right|_R = \left[\frac{d}{dt}\int_{M\in S}\overrightarrow{AM}\wedge\vec{V}_{(M,S/R)}dm\right]_R = \int_{M\in S}\left[\frac{d}{dt}\left(\overrightarrow{AM}\wedge\vec{V}_{(M,S/R)}\right)\right]_R dm$$

$$= \int_{M\in S}\left.\frac{d\overrightarrow{AM}}{dt}\right|_R\wedge\vec{V}_{(M,S/R)}dm + \int_{M\in S}\overrightarrow{AM}\wedge\left.\frac{d\vec{V}_{(M,S/R)}}{dt}\right|_R dm$$

$$= \int_{M\in S}\left(\vec{V}_{(M,S/R)} - \vec{V}_{(A/R)}\right)\wedge\vec{V}_{(M,S/R)}dm + \underbrace{\int_{M\in S}\overrightarrow{AM}\wedge\vec{a}_{(M,S/R)}dm}_{\vec{\delta}_{A(S/R)}}$$



$$\vec{\delta}_{A(S/R)} = \left.\frac{d\vec{\sigma}_{A(S/R)}}{dt}\right|_R + \int_{M\in S}\vec{V}_{(A/R)}\wedge\vec{V}_{(M,S/R)}dm$$

8 - Eléments de réduction du Torseur Dynamique

♥ ♥ ♥ A retenir...

$$\boxed{\overrightarrow{R_{d(S/R)}} = m_S . \overrightarrow{a}_{(G,S/R)}}$$

$$\boxed{\overrightarrow{\delta_{A(S/R)}} = \left.\frac{d\overrightarrow{\sigma_{A(S/R)}}}{dt}\right|_R + \overrightarrow{V}_{(A/R)} \wedge m_S . \overrightarrow{V}_{(G,S/R)}}$$

$\overrightarrow{V}_{(A/R)}$: vecteur vitesse du point géométrique A par rapport à R, n'appartient pas forcément à S.

♥ Si $\overrightarrow{V}_{(A/R)} = \overrightarrow{V}_{(G,S/R)}$: **A = G**

$$\boxed{\overrightarrow{\delta_{G(S/R)}} = \left.\frac{d\overrightarrow{\sigma_{G(S/R)}}}{dt}\right|_R}$$

Si $\overrightarrow{V}_{(A/R)} = \overrightarrow{0}$ ou $\overrightarrow{V}_{(A/R)} \mathbin{//} \overrightarrow{V}_{(G,S/R)}$

$$\overrightarrow{\delta_{A(S/R)}} = \left.\frac{d\overrightarrow{\sigma_{A(S/R)}}}{dt}\right|_R$$

Double produit vectoriel

Le **double produit vectoriel** de trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ se calcule par la formule de Gibbs :

$$\boxed{\vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w}) = (\vec{u} \cdot \vec{w}).\vec{v} - (\vec{u} \cdot \vec{v}).\vec{w}}$$

Le second membre se lit : *$\vec{u}$ **scalaire** $\vec{w}$ **porté par** $\vec{v}$ moins $\vec{u}$ **scalaire** $\vec{v}$ **porté par** $\vec{w}$*

Produit mixte

Étant donnés trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$, on appelle **produit mixte**, la quantité : $\left(\vec{u} \wedge \vec{v}\right) \cdot \vec{w}$

Invariance par permutation circulaire : $\left(\vec{u} \wedge \vec{v}\right) \cdot \vec{w} = \left(\vec{v} \wedge \vec{w}\right) \cdot \vec{u} = \left(\vec{w} \wedge \vec{u}\right) \cdot \vec{v}$

Nullité si un vecteur apparait 2 fois : $\left(\vec{u} \wedge \vec{u}\right) \cdot \vec{w} = 0$

Changement de signe si permutation de 2 vecteurs : $\left(\vec{u} \wedge \vec{v}\right) \cdot \vec{w} = -\left(\vec{v} \wedge \vec{u}\right) \cdot \vec{w}$