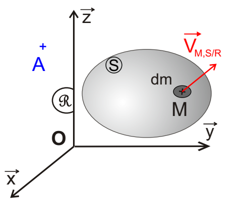
# Dynamique des Systèmes Mécaniques 2
## Cinétique

Spé MP–MP* 2025-2026

*Lycée Thiers Marseille*




**Torseur Cinétique**

$$\left\{\mathcal{C}_{(S/R)}\right\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{R_c}_{(S/R)} = \displaystyle\int_{M\in S} \overrightarrow{V}_{(M,S/R)}.dm = \boldsymbol{m_S.\overrightarrow{V}_{(G,S/R)}} \\ \overrightarrow{\sigma}_{A(S/R)} = \displaystyle\int_{M\in S} \overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{V}_{(M,S/R)}.dm \end{array} \right\}_A$$

**Torseur Dynamique**

$$\left\{\mathcal{D}_{(S/R)}\right\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{R_d}_{(S/R)} = \displaystyle\int_{M\in S} \overrightarrow{a}_{(M,S/R)}.dm = \boldsymbol{m_S.\overrightarrow{a}_{(G,S/R)}} \\ \overrightarrow{\delta}_{A(S/R)} = \displaystyle\int_{M\in S} \overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{a}_{(M,S/R)}.dm \end{array} \right\}_A$$

Avec $$\boxed{\boldsymbol{\overrightarrow{\delta}_{A(S/R)} = \left.\frac{d\overrightarrow{\sigma}_{A(S/R)}}{dt}\right|_R + \overrightarrow{V}_{(A/R)} \wedge m_S.\overrightarrow{V}_{(G,S/R)}}}$$

$\overrightarrow{V}_{(A/R)}$ : vecteur vitesse du point géométrique A par rapport à R, n'appartient pas forcément à S.

<u>**Objectif :**</u> **Exprimer** $\overrightarrow{\sigma}_{A(S/R)}$, moment cinétique en A de S par rapport à R.

# 2.1 Eléments de réduction du Torseur Cinétique : Calcul du moment cinétique en G

On calcule le moment cinétique de S par rapport à R au point G :

$$\overrightarrow{\sigma}_{G(S/R)} \overset{\text{def}}{=} \int_{M\in S} \overrightarrow{GM} \wedge \overrightarrow{V}_{(M,S/R)} dm = \int_{M\in S} \overrightarrow{GM} \wedge \left( \overrightarrow{V}_{(G,S/R)} + \overrightarrow{\Omega}_{(S/R)} \wedge \overrightarrow{GM} \right) .dm$$

$$= \underbrace{\left( \int_{M\in S} \overrightarrow{GM} dm \right)}_{\overrightarrow{0}} \wedge \overrightarrow{V}_{(G,S/R)} + \int_{M\in S} \overrightarrow{GM} \wedge \left( \overrightarrow{\Omega}_{(S/R)} \wedge \overrightarrow{GM} \right) .dm$$

$$\overrightarrow{\sigma}_{G(S/R)} = \int_{M\in S} \overrightarrow{GM} \wedge \left( \overrightarrow{\Omega}_{(S/R)} \wedge \overrightarrow{GM} \right) .dm$$

## Pointeur d'inertie

On définit le *pointeur d'inertie* du solide S au point G appliqué au vecteur $\vec{u}$ :

$$\overrightarrow{J_G}(S, \vec{u}) = \int_{M\in S} \overrightarrow{GM} \wedge (\vec{u} \wedge \overrightarrow{GM}).dm$$

## 2.2 Eléments de réduction du Torseur Cinétique : Opérateur d'inertie

L'opérateur d'inertie $\mathbf{I}$(G,S) d'un solide (S) en un point G est l'opérateur linéaire :

$$\vec{u} \longrightarrow \mathbf{I}(\mathrm{G,S})\cdot\vec{u} = \int_{M \in S} \overrightarrow{GM} \wedge (\vec{u} \wedge \overrightarrow{GM}).dm$$

L'opérateur $\mathbf{I}$(G,S) étant linéaire, il peut être représenté par une matrice.

En posant $\overrightarrow{GM} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}_{\mathcal{B}_s}$, dans la base $\mathcal{B}_s = (\vec{x}_s, \vec{y}_s, \vec{z}_s)$ :

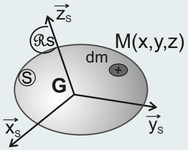
$$[\vec{u} \wedge \overrightarrow{GM}] = -[\overrightarrow{GM} \wedge \vec{u}] = -\begin{bmatrix} 0 & -z & y \\ z & 0 & -x \\ -y & x & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{bmatrix}$$

$$[\overrightarrow{GM} \wedge (\vec{u} \wedge \overrightarrow{GM})] = -\begin{bmatrix} 0 & -z & y \\ z & 0 & -x \\ -y & x & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -z & y \\ z & 0 & -x \\ -y & x & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{bmatrix}$$

$$[\overrightarrow{GM} \wedge (\vec{u} \wedge \overrightarrow{GM})] = \begin{bmatrix} y^2+z^2 & -xy & -xz \\ -xy & x^2+z^2 & -yz \\ -xz & -yz & x^2+y^2 \end{bmatrix}_{\mathcal{B}_s} \cdot \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{bmatrix}_{\mathcal{B}_s}$$

# 2.3 Eléments de réduction du Torseur Cinétique : Matrice d'inertie

## ♥ ♥ ♥ Matrice d'inertie du solide S exprimée en G dans la base $\mathcal{B}_s = (\vec{x}_s, \vec{y}_s, \vec{z}_s)$




$$\mathbf{I}(G,S)=\begin{bmatrix} \int_{M\in S} (y^2+z^2).dm & \int_{M\in S} -xy.dm & \int_{M\in S} -xz.dm \\ \int_{M\in S} -xy.dm & \int_{M\in S} (x^2+z^2).dm & \int_{M\in S} -yz.dm \\ \int_{M\in S} -xz.dm & \int_{M\in S} -yz.dm & \int_{M\in S} (x^2+y^2).dm \end{bmatrix}_{\mathcal{B}_s}$$

**A**, **B** et **C moments d'inertie**
par rapport à $(G, \vec{x}_s)$, à $(G, \vec{y}_s)$ et à $(G, \vec{z}_s)$
**D**, **E** et **F produits d'inertie**
Unité : $kg.m^2$

$$\boxed{\mathbf{I}(G,S) = \begin{bmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{bmatrix}_{\mathcal{B}_s}}$$

## ♥ ♥ Moment cinétique au point G de S par rapport à R

$$\boxed{\overrightarrow{\sigma_{G(S/R)}} = \mathbf{I}(G,S) \cdot \overrightarrow{\Omega_{(S/R)}}}$$

exprimés dans la **même base**.

# En pratique... **Résumé 1**

On connaît la matrice d'inertie au point G : $\mathbf{I}(G,S)$, alors $\overrightarrow{\sigma}_{G(S/R)} = \mathbf{I}(G,S) \cdot \overrightarrow{\Omega}_{(S/R)}$.

On cherche le moment dynamique au point $A \neq G$ : $\overrightarrow{\delta}_{A(S/R)} =?$

$\overrightarrow{\sigma}_{G(S/R)}$

$$\overrightarrow{\sigma}_{A(S/R)} = \overrightarrow{\sigma}_{G(S/R)} + \overrightarrow{AG} \wedge \overrightarrow{R_c}_{(S/R)}$$

$\overrightarrow{\sigma}_{A(S/R)}$

$$\overrightarrow{\delta}_{A(S/R)} = \left.\frac{d\overrightarrow{\sigma}_{A(S/R)}}{dt}\right|_R + \overrightarrow{V}_{(A/R)} \wedge \overrightarrow{R_c}_{(S/R)}$$

$\overrightarrow{\delta}_{A(S/R)} = ?$

$$\overrightarrow{\delta}_{G(S/R)} = \left.\frac{d\overrightarrow{\sigma}_{G(S/R)}}{dt}\right|_R$$

$\overrightarrow{\delta}_{G(S/R)}$

$$\overrightarrow{\delta}_{A(S/R)} = \overrightarrow{\delta}_{G(S/R)} + \overrightarrow{AG} \wedge \overrightarrow{R_d}_{(S/R)}$$

$\overrightarrow{\delta}_{A(S/R)} = ?$

## 3.1 Eléments de réduction du Torseur Cinétique si $\mathbf{I}(\mathrm{G,S})$ inconnue : Calcul du moment cinétique en un point A quelconque

Si la matrice d'inertie $\mathbf{I}(\mathrm{A,S})$ de S est connue en A, différent de G :

$$\overrightarrow{\sigma}_{A(S/R)} \stackrel{\text{def}}{=} \int_{M\in S} \overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{V}_{(M,S/R)}.dm = \int_{M\in S} \overrightarrow{AM} \wedge \left(\overrightarrow{V}_{(A,S/R)} + \overrightarrow{\Omega}_{(S/R)} \wedge \overrightarrow{AM}\right).dm$$

$$= \underbrace{\left(\int_{M\in S} \overrightarrow{AM}.dm\right)}_{m_s.\overrightarrow{AG}} \wedge \overrightarrow{V}_{(A,S/R)} + \underbrace{\int_{S} \overrightarrow{AM} \wedge \left(\overrightarrow{\Omega}_{(S/R)} \wedge \overrightarrow{AM}\right).dm}_{\mathbf{I}(\mathrm{A,S})\cdot\overrightarrow{\Omega}_{(S/R)}}$$

### ♥ Moment cinétique en un point A quelconque

$$\boxed{\overrightarrow{\sigma}_{A(S/R)} = \mathbf{I}(\mathrm{A,S})\cdot\overrightarrow{\Omega}_{(S/R)} + m_s.\overrightarrow{AG} \wedge \overrightarrow{V}_{(A,S/R)}}$$

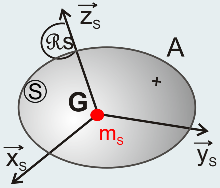
# 3.2 Eléments de réduction du Torseur Cinétique si $\mathbf{I}(\mathrm{G,S})$ inconnue : Théorème de Huygens

On cherche à calculer la matrice d'inertie du solide (S) en un point A quelconque à partir de la matrice d'inertie au centre de gravité G.

$$\overrightarrow{J_A}(S,\vec{u}) \overset{\text{def}}{=} \int_{M\in S} \overrightarrow{AM}\wedge(\vec{u}\wedge\overrightarrow{AM}).dm = \int_{M\in S} (\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{GM})\wedge(\vec{u}\wedge(\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{GM})).dm$$

$$= \underbrace{\int_{M\in S} \overrightarrow{AG}\wedge(\vec{u}\wedge\overrightarrow{AG}).dm}_{m_s.\overrightarrow{AG}\wedge(\vec{u}\wedge\overrightarrow{AG})} + \cancel{\int_{M\in S} \overrightarrow{GM}\wedge(\vec{u}\wedge\overrightarrow{AG}).dm} + \cancel{\int_{M\in S} \overrightarrow{AG}\wedge(\vec{u}\wedge\overrightarrow{GM}).dm} + \underbrace{\int_{M\in S} \overrightarrow{GM}\wedge(\vec{u}\wedge\overrightarrow{GM}).dm}_{\overrightarrow{J_G}(S,\vec{u})}$$

## Théorème de Huygens




$$\overrightarrow{AG} = a.\vec{x}_s + b.\vec{y}_s + c.\vec{z}_s$$

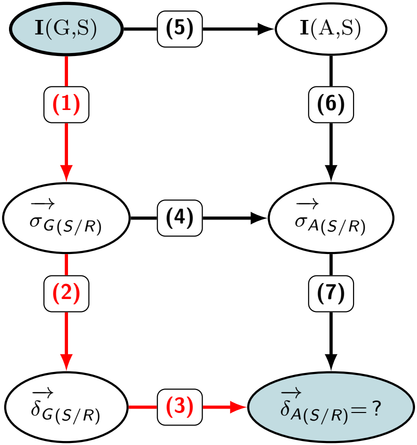
$$\boxed{\mathbf{I}(\mathrm{A,S}) = \mathbf{I}(\mathrm{G,S}) + \mathbf{I}(\mathrm{A},m_s \text{ concentrée en G})}$$

$$\boxed{\mathbf{I}(\mathrm{A,S}) = \mathbf{I}(\mathrm{G,S}) + m_s.\begin{bmatrix} b^2+c^2 & -ab & -ac \\ -ab & a^2+c^2 & -bc \\ -ac & -bc & a^2+b^2 \end{bmatrix}}$$

exprimés dans la **même base** $(\vec{x}_s,\vec{y}_s,\vec{z}_s)$

# En pratique... **Synthèse**

On cherche le moment dynamique au point $A \neq G$ : $\overrightarrow{\delta}_{A(S/R)} = ?$




$$
\begin{aligned}
&\textbf{(1)} \quad \overrightarrow{\sigma}_{G(S/R)} &&= \mathbf{I}(G,S) \cdot \overrightarrow{\Omega}_{(S/R)} \\
&\textbf{(2)} \quad \overrightarrow{\delta}_{G(S/R)} &&= \left.\frac{d\overrightarrow{\sigma}_{G(S/R)}}{dt}\right|_R \\
&\textbf{(3)} \quad \overrightarrow{\delta}_{A(S/R)} &&= \overrightarrow{\delta}_{G(S/R)} + \overrightarrow{AG} \wedge m_S . \overrightarrow{a}_{(G,S/R)} \\
&(4) \quad \overrightarrow{\sigma}_{A(S/R)} &&= \overrightarrow{\sigma}_{G(S/R)} + \overrightarrow{AG} \wedge m_S . \overrightarrow{V}_{(G,S/R)} \\
&(5) \quad \mathbf{I}(A,S) &&= \mathbf{I}(G,S) + \mathbf{I}(A, m_s \text{ concentrée en } G) \\
&(6) \quad \overrightarrow{\sigma}_{A(S/R)} &&= \mathbf{I}(A,S) \cdot \overrightarrow{\Omega}_{(S/R)} + m_s . \overrightarrow{AG} \wedge \overrightarrow{V}_{(A,S/R)} \\
&(7) \quad \overrightarrow{\delta}_{A(S/R)} &&= \left.\frac{d\overrightarrow{\sigma}_{A(S/R)}}{dt}\right|_R + \overrightarrow{V}_{(A/R)} \wedge m_S . \overrightarrow{V}_{(G,S/R)}
\end{aligned}
$$

Le chemin (1)→(2)→(3) est le plus astucieux