Dynamique des Systèmes Mécaniques 3
Matrice d'inertie d'un solide

Spé MP–MP* 2025-2026

Lycée Thiers Marseille

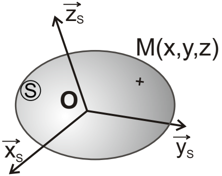
On rappelle $\overrightarrow{\boldsymbol{\sigma}_{G(S/R)}} = \mathbf{I}(\mathrm{G,S}) \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{\Omega}}_{(S/R)}$, avec

$$\mathbf{I}(\mathrm{G,S}) = \begin{bmatrix} \int_{M\in S} (y^2+z^2).dm & \int_{M\in S} -xy.dm & \int_{M\in S} -xz.dm \\ \int_{M\in S} -xy.dm & \int_{M\in S} (x^2+z^2).dm & \int_{M\in S} -yz.dm \\ \int_{M\in S} -xz.dm & \int_{M\in S} -yz.dm & \int_{M\in S} (x^2+y^2).dm \end{bmatrix}_{G,(\vec{x}_S,\vec{y}_S,\vec{z}_S)}$$

On rappelle $\overrightarrow{\sigma_{G(S/R)}} = \mathbf{I}(\mathrm{G,S}) \cdot \overrightarrow{\Omega}_{(S/R)}$, avec

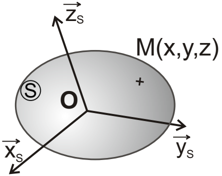
$$\mathbf{I}(\mathrm{G,S}) = \begin{bmatrix} \int\limits_{M\in S} (y^2+z^2).dm & \int\limits_{M\in S} -xy.dm & \int\limits_{M\in S} -xz.dm \\ \int\limits_{M\in S} -xy.dm & \int\limits_{M\in S} (x^2+z^2).dm & \int\limits_{M\in S} -yz.dm \\ \int\limits_{M\in S} -xz.dm & \int\limits_{M\in S} -yz.dm & \int\limits_{M\in S} (x^2+y^2).dm \end{bmatrix}_{G,(\vec{x}_S,\vec{y}_S,\vec{z}_S)}$$

Objectif : **Justifier** la forme particulière de la matrice d'inertie en fonction des symétries matérielles d'un solide. On ne demande pas de calculer les éléments de la matrice d'inertie.



La matrice d'inertie est une **caractéristique** du solide S dans un repère associé à ce solide :

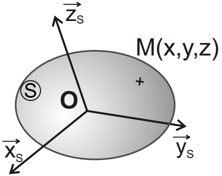
$$\mathbf{I}(\mathrm{O,S})=\begin{bmatrix} \boldsymbol{A} & -\boldsymbol{F} & -\boldsymbol{E} \\ -\boldsymbol{F} & \boldsymbol{B} & -\boldsymbol{D} \\ -\boldsymbol{E} & -\boldsymbol{D} & \boldsymbol{C} \end{bmatrix}_{O,(\vec{x}_s,\vec{y}_s,\vec{z}_s)}$$



La matrice d'inertie est une **caractéristique** du solide S dans un repère associé à ce solide :

$$\mathbf{I}(O,S)=\begin{bmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{bmatrix}_{O,(\vec{x}_s,\vec{y}_s,\vec{z}_s)}$$

Eléments de la matrice d'inertie



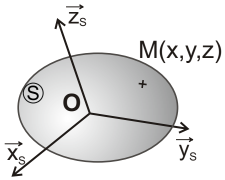
La matrice d'inertie est une **caractéristique** du solide S dans un repère associé à ce solide :

$$\mathbf{I}(\mathrm{O,S}) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A} & -\boldsymbol{F} & -\boldsymbol{E} \\ -\boldsymbol{F} & \boldsymbol{B} & -\boldsymbol{D} \\ -\boldsymbol{E} & -\boldsymbol{D} & \boldsymbol{C} \end{bmatrix}_{\boldsymbol{O},(\vec{x}_s,\vec{y}_s,\vec{z}_s)}$$

Eléments de la matrice d'inertie

Moments d'inertie respectivement par rapport aux axes $(\mathrm{O},\vec{x}_s)$, $(\mathrm{O},\vec{y}_s)$, et $(\mathrm{O},\vec{z}_s)$:

$$\boxed{\mathrm{A} = \int_{M \in S} (y^2 + z^2).dm \qquad \mathrm{B} = \int_{M \in S} (x^2 + z^2).dm \qquad \mathrm{C} = \int_{M \in S} (x^2 + y^2).dm}$$



La matrice d'inertie est une **caractéristique** du solide S dans un repère associé à ce solide :

$$\mathbf{I}(O,S)=\begin{bmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{bmatrix}_{O,(\vec{x}_s,\vec{y}_s,\vec{z}_s)}$$

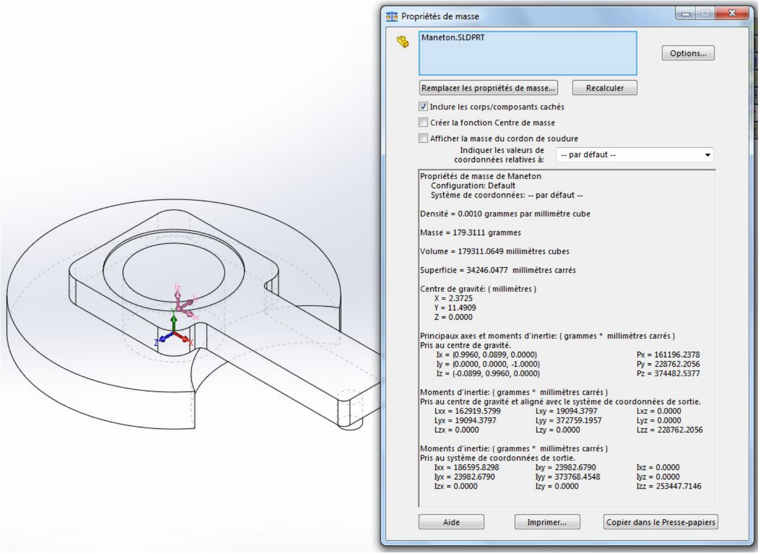
Eléments de la matrice d'inertie

Moments d'inertie respectivement par rapport aux axes $(O,\vec{x}_s)$, $(O,\vec{y}_s)$, et $(O,\vec{z}_s)$:

$$\boxed{A = \int_{M\in S} (y^2+z^2).dm \qquad B = \int_{M\in S} (x^2+z^2).dm \qquad C = \int_{M\in S} (x^2+y^2).dm}$$

Produits d'inertie respectivement par rapport aux plans $(O,\vec{y}_s,\vec{z}_s)$, $(O,\vec{x}_s,\vec{z}_s)$ et $(O,\vec{x}_s,\vec{y}_s)$:

$$\boxed{D = \int_{M\in S} yz.dm \qquad E = \int_{M\in S} xz.dm \qquad F = \int_{M\in S} xy.dm}$$


Propriétés de masse
Maneton.SLDPRT
Options...
Remplacer les propriétés de masse...
Recalculer
Inclure les corps/composants cachés
Créer la fonction Centre de masse
Afficher la masse du cordon de soudure
Indiquer les valeurs de coordonnées relatives à:
-- par défaut --
Propriétés de masse de Maneton
Configuration: Default
Système de coordonnées: -- par défaut --
Densité = 0.0010 grammes par millimètre cube
Masse = 179.3111 grammes
Volume = 179311.0649 millimètres cubes
Superficie = 34246.0477 millimètres carrés
Centre de gravité: (millimètres)
X = 2.3725
Y = 11.4909
Z = 0.0000
Principaux axes et moments d'inertie: (grammes * millimètres carrés)
Pris au centre de gravité.
Ix = (0.9960, 0.0899, 0.0000)
Px = 161196.2378
Iy = (0.0000, 0.0000, -1.0000)
Py = 228762.2056
Iz = (-0.0899, 0.9960, 0.0000)
Pz = 374482.5377
Moments d'inertie: (grammes * millimètres carrés)
Pris au centre de gravité et aligné avec le système de coordonnées de sortie.
Lxx = 162919.5799
Lxy = 19094.3797
Lxz = 0.0000
Lyx = 19094.3797
Lyy = 372759.1957
Lyz = 0.0000
Lzx = 0.0000
Lzy = 0.0000
Lzz = 228762.2056
Moments d'inertie: (grammes * millimètres carrés)
Pris au système de coordonnées de sortie.
Ixx = 186595.8298
Ixy = 23982.6790
Ixz = 0.0000
Iyx = 23982.6790
Iyy = 373768.4548
Iyz = 0.0000
Izx = 0.0000
Izy = 0.0000
Izz = 253447.7146
Aide
Imprimer...
Copier dans le Presse-papiers

Repère principal d’inertie

Repère principal d'inertie

Il existe un **repère principal d'inertie** dans lequel la matrice au centre de ce repère est **diagonale**.

Repère principal d'inertie

Il existe un **repère principal d'inertie** dans lequel la matrice au centre de ce repère est **diagonale**. Si ce point est confondu avec le centre d'inertie G, on parlera de repère central principal d'inertie.

$$\mathbf{I}(\mathrm{G,S}) = \begin{bmatrix} A' & 0 & 0 \\ 0 & B' & 0 \\ 0 & 0 & C' \end{bmatrix}_{G,(\vec{x}_s,\vec{y}_s,\vec{z}_s)}$$

1.4 Matrice d'inertie : Repère principal d'inertie

Repère principal d'inertie

Il existe un **repère principal d'inertie** dans lequel la matrice au centre de ce repère est **diagonale**. Si ce point est confondu avec le centre d'inertie G, on parlera de repère central principal d'inertie.

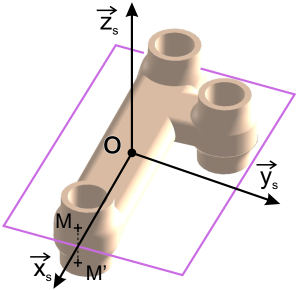
$$\mathbf{I}(\mathrm{G,S}) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A'} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{B'} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \boldsymbol{C'} \end{bmatrix}_{\boldsymbol{G,(\vec{x}_s,\vec{y}_s,\vec{z}_s)}}$$

Les moments d'inertie A', B' et C' sont les **<u>moments principaux d'inertie</u>** de S en G (= valeurs propres de l'opérateur d'inertie).

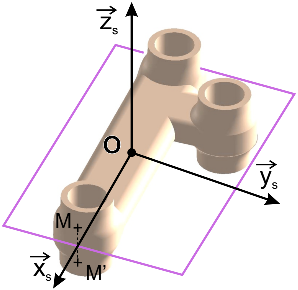
Symétrie matérielle

On parle de symétrie matérielle lorsqu'il y a à la fois symétrie géométrique et symétrie de répartition de masse pour le système considéré.

Un plan de symétrie matérielle

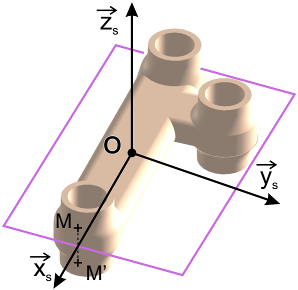


Un plan de symétrie matérielle



S admet le plan de symétrie $(O, \vec{x}_s, \vec{y}_s)$.

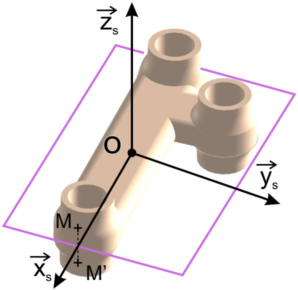
Un plan de symétrie matérielle



S admet le plan de symétrie $(O, \vec{x}_s, \vec{y}_s)$.

Soient M(x,y,z) et M'(x,y,-z) symétrique de M par rapport au plan alors :

Un plan de symétrie matérielle

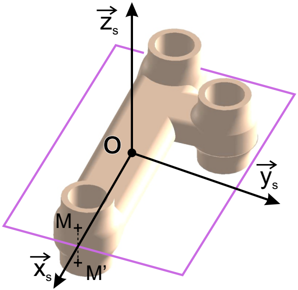


S admet le plan de symétrie $(O,\vec{x}_s,\vec{y}_s)$.

Soient M(x,y,z) et M'(x,y,-z) symétrique de M par rapport au plan alors :

$$D = \int_{M \in S} yz.dm = 0 \qquad E = \int_{M \in S} xz.dm = 0$$

Un plan de symétrie matérielle



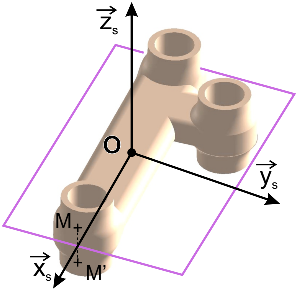
S admet le plan de symétrie $(O, \vec{x}_s, \vec{y}_s)$.

Soient M(x,y,z) et M'(x,y,-z) symétrique de M par rapport au plan alors :

$$D = \int_{M \in S} yz.dm = 0 \qquad E = \int_{M \in S} xz.dm = 0$$

Donc : $\boxed{\mathbf{I}(O,S) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A} & -\boldsymbol{F} & \mathbf{0} \\ -\boldsymbol{F} & \boldsymbol{B} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \boldsymbol{C} \end{bmatrix}_{O,(\vec{x}_s,\vec{y}_s,\vec{z}_s)}}$

Un plan de symétrie matérielle



S admet le plan de symétrie (O,$\vec{x}_s$,$\vec{y}_s$).

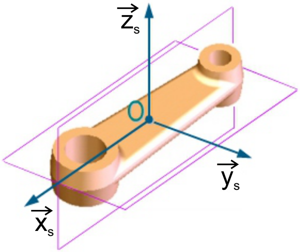
Soient M(x,y,z) et M'(x,y,-z) symétrique de M par rapport au plan alors :

$$\mathrm{D} = \int_{M \in S} yz.dm = 0 \qquad \mathrm{E} = \int_{M \in S} xz.dm = 0$$

Donc : $\boxed{\mathbf{I}(\mathrm{O,S}) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A} & -\boldsymbol{F} & \mathbf{0} \\ -\boldsymbol{F} & \boldsymbol{B} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \boldsymbol{C} \end{bmatrix}_{O,(\vec{x}_s,\vec{y}_s,\vec{z}_s)}}$

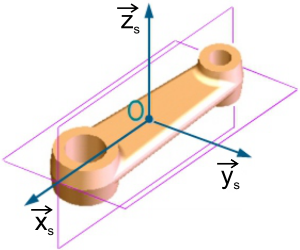
C est moment principal d'inertie selon (O,$\vec{z}_s$)

2 plans de symétrie matérielle



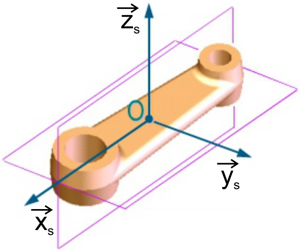
2.2 Simplification en fonction des symétries matérielles : Solide possèdant 2 plans de symétrie

2 plans de symétrie matérielle



S admet les plans de symétrie $(O,\vec{x}_s,\vec{y}_s)$ et $(O,\vec{x}_s,\vec{z}_s)$,

2 plans de symétrie matérielle

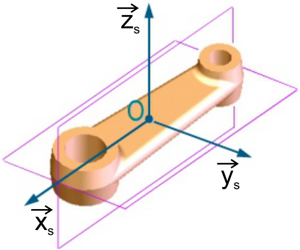


S admet les plans de symétrie $(O,\vec{x}_s,\vec{y}_s)$ et $(O,\vec{x}_s,\vec{z}_s)$,

$$\text{alors : } D = E = 0$$

$$\text{et } F = \int_{M \in S} xy.dm = 0$$

2 plans de symétrie matérielle



S admet les plans de symétrie $(O,\vec{x}_s,\vec{y}_s)$ et $(O,\vec{x}_s,\vec{z}_s)$,

alors : $D = E = 0$

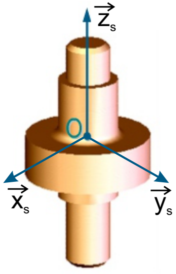
et $F = \int_{M \in S} xy.dm = 0$

Donc : $\boxed{\mathbf{I}(O,S) = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix}_{O,(\vec{x}_s,\vec{y}_s,\vec{z}_s)}}$

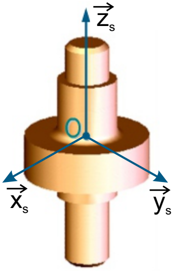
A, **B** et **C** sont moments principaux d'inertie.

2.3 Simplification en fonction des symétries matérielles : Solide possèdant un axe de symétrie

Axe de symétrie matérielle

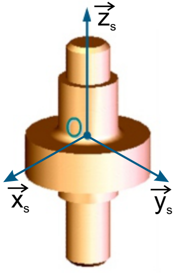


Axe de symétrie matérielle



S admet l'axe de symétrie $(O,\vec{z}_s)$ donc :

Axe de symétrie matérielle

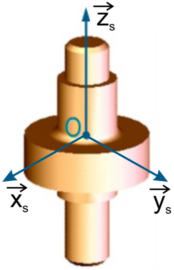


S admet l'axe de symétrie $(O,\vec{z}_s)$ donc :

- $(O,\vec{x}_s,\vec{z}_s)$ et $(O,\vec{y}_s,\vec{z}_s)$ sont plans de symétrie :

$$\mathbf{D} = \mathbf{E} = \mathbf{F} = \mathbf{0}$$

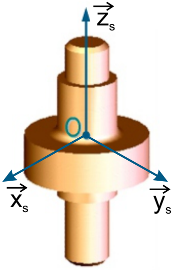
Axe de symétrie matérielle



S admet l'axe de symétrie $(O,\vec{z}_s)$ donc :

- $(O,\vec{x}_s,\vec{z}_s)$ et $(O,\vec{y}_s,\vec{z}_s)$ sont plans de symétrie :
  $$\mathbf{D = E = F = 0}$$
- x ↔ y : $\mathbf{A = B}$

Axe de symétrie matérielle



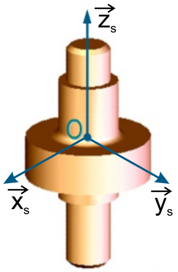
S admet l'axe de symétrie $(O,\vec{z}_s)$ donc :

- $(O,\vec{x}_s,\vec{z}_s)$ et $(O,\vec{y}_s,\vec{z}_s)$ sont plans de symétrie :
  $$\mathbf{D} = \mathbf{E} = \mathbf{F} = \mathbf{0}$$
- x $\leftrightarrow$ y : $\mathbf{A} = \mathbf{B}$

Donc : $$\boxed{\mathbf{I}(O,S) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{A} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \boldsymbol{C} \end{bmatrix}_{O,(-,-,\vec{z}_s)}}$$

2.3 Simplification en fonction des symétries matérielles : Solide possèdant un axe de symétrie

Axe de symétrie matérielle



S admet l'axe de symétrie $(O,\vec{z}_s)$ donc :

- $(O,\vec{x}_s,\vec{z}_s)$ et $(O,\vec{y}_s,\vec{z}_s)$ sont plans de symétrie :
  $$\mathbf{D = E = F = 0}$$
- x ↔ y : $\mathbf{A = B}$

Donc : $\boxed{\mathbf{I}(O,S) = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix}_{O,(-,-,\vec{z}_s)}}$

$\boldsymbol{O,(-,-,\vec{z}_s)}$ indique que tout repère passant par O et contenant $\vec{z}_s$ est principal d'inertie, la matrice d'inertie est la même dans tous ces repères.