Dynamique des Systèmes Mécaniques 4
Equilibrage statique et dynamique

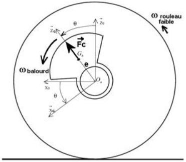
Spé MP–MP* 2025-2026

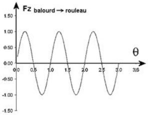
Lycée Thiers Marseille

1 - Problématique : Solide en rotation autour d'un axe fixe

On s'intéresse à un solide en rotation autour d'un axe fixe, une mauvaise répartition de matière autour de cet axe provoque des vibrations et du bruit.
On souhaite comprendre l'origine de ces vibrations et y remédier (ou pas !).

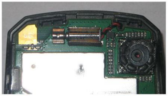
Compacteur à rouleaux (et masselottes rotatives) - (sujet Centrale Supelec TSI 2004)
Les vibrations provoquées par le balourd tournant sont utiles au compactage du sol.

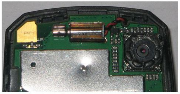




$$Fz_{balourd \to rouleau} = M_b.e.(\omega_b)^2.\cos(\theta)$$

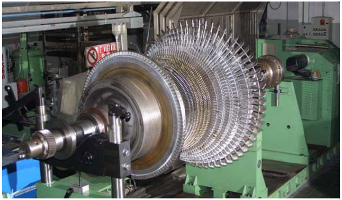
Vibreur de téléphone





1 - Problématique : Solide en rotation autour d'un axe fixe

Présence de forces tournantes indésirables $\rightarrow$ vibrations nuisibles provoquant au mieux une gêne pour l'utilisateur, pouvant entrainer la rupture des matériaux.



Arbre de compresseur de réacteur
image : http://www.kelvin.it/fran/attivita/attivita_equilibrat.htm

Objectif : supprimer les vibrations dues aux masses "mal réparties" en réalisant un équilibrage statique et dynamique.

image : F_WEISS

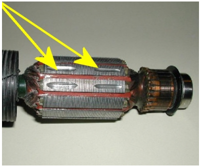


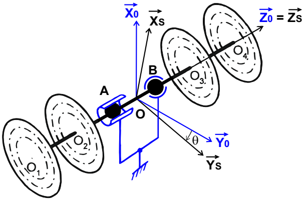
image : B_EGO

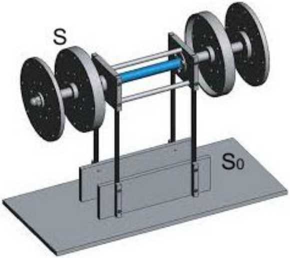
image : http://perso.numericable.fr/~promitiphi24/Tigrax16xe/Site/Preparation.htm

Exemples : roue de voiture, rotor de moteur électrique, vilebrequin

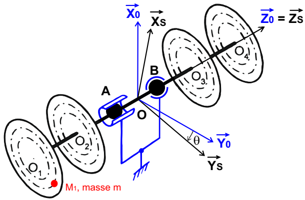
2.1 Mise en évidence du problème : Expérience 1 : Sans masse additionnelle

Soit le banc d'équilibrage du laboratoire de SII :





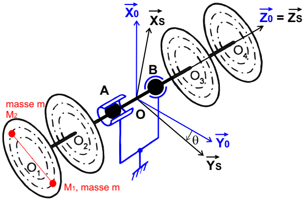
Caractéristiques d'inertie	Conséquences
G $\in (O, \vec{z}_0)$	Equilibre à l'arrêt : **oui**
$\mathbf{I}(O,S) = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix}_{O,(\vec{x}_s,\vec{y}_s,\vec{z}_0)}$	Vibrations en rotation : **non**



Masse m en M_1 : $\overrightarrow{O_1 M_1} = R.\vec{y}_S$

Caractéristiques d'inertie	Conséquences
G $\notin (O, \vec{z}_0)$	Equilibre à l'arrêt : **non**
$\mathbf{I}(\mathrm{O},S) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{B} & -\boldsymbol{D} \\ \mathbf{0} & -\boldsymbol{D} & \boldsymbol{C} \end{bmatrix}_{O,(\vec{x}_s,\vec{y}_s,\vec{z}_0)}$	Vibrations en rotation : **oui**

2.3 Mise en évidence du problème : Expérience 3 : 2 masses additionnelles

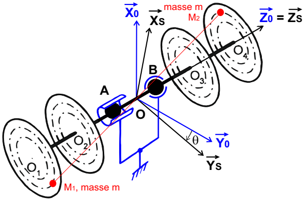


Masse m en M_1 : $\overrightarrow{O_1 M_1} = R.\vec{y}_S$

Masse m en M_2 : $\overrightarrow{O_1 M_2} = -R.\vec{y}_S$

Caractéristiques d'inertie	Conséquences
G $\in (O, \vec{z}_0)$	Equilibre à l'arrêt : **oui**
$\mathbf{I}(\mathrm{O},S) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{B} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \boldsymbol{C} \end{bmatrix}_{O,(\vec{x}_s,\vec{y}_s,\vec{z}_0)}$	Vibrations en rotation : **non**

2.4 Mise en évidence du problème : Expérience 4 : 2 masses additionnelles

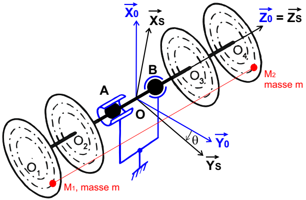


Masse m en M_1 : $\overrightarrow{O_1 M_1} = R.\vec{y}_S$

Masse m en M_2 : $\overrightarrow{O_4 M_2} = -R.\vec{y}_S$

Caractéristiques d'inertie	Conséquences
G $\in (O, \vec{z}_0)$	Equilibre à l'arrêt : **oui**
$\mathbf{I}(\mathrm{O},S) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{B} & -\boldsymbol{D} \\ \mathbf{0} & -\boldsymbol{D} & \boldsymbol{C} \end{bmatrix}_{O,(\vec{x}_s,\vec{y}_s,\vec{z}_0)}$	Vibrations en rotation : **oui**

2.5 Mise en évidence du problème :
Expérience 5 : 2 masses additionnelles



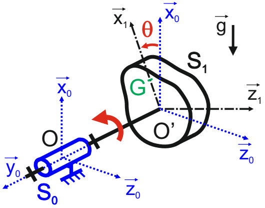
Masse m en M_1 : $\overrightarrow{O_1 M_1} = R.\vec{y}_S$

Masse m en M_2 : $\overrightarrow{O_4 M_2} = R.\vec{y}_S$

Caractéristiques d'inertie	Conséquences
G $\notin (O, \vec{z}_0)$	Equilibre à l'arrêt : **non**
$\mathbf{I}(\mathrm{O}, S) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{B} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \boldsymbol{C} \end{bmatrix}_{O,(\vec{x}_s, \vec{y}_s, \vec{z}_0)}$	Vibrations en rotation : **oui**

3.1 Conditions d'équilibrage : Paramétrage

Soit un solide S_1 en rotation autour de l'axe $(O,\vec{y}_{01})$ par rapport au bati S_0 :



- $\theta(t) = (\vec{x}_0, \vec{x}_1)$,
- S_1 : masse m

$$\overrightarrow{OG} = a.\vec{x}_1 + c.\vec{y}_0$$

$$\mathbf{I}(O,S_1) = \begin{bmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{bmatrix}_{O,(\vec{x}_1,\vec{y}_{01},\vec{z}_1)}$$

Conditions d'équilibrage

Un solide S_1, en rotation par rapport au bâti S_0, est équilibré dynamiquement si les actions mécaniques dans la liaison pivot (S_1/S_0) sont indépendantes de la position angulaire de (S_1), quelles que soient sa position et sa vitesse de rotation.

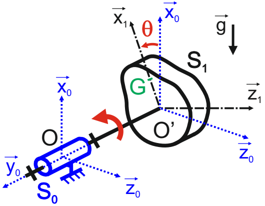
Objectif : Déterminer les actions mécaniques dans la pivot S_1/S_0.

- On isole le solide S_1,
- Bilan des actions mécaniques extérieures :

➢ Pivot 0 → 1 (parfaite) :

$$\left\{\mathcal{T}(0 \to 1)\right\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{R}_{(0\to1)} \\ \\ \overrightarrow{M}_{P,(0\to1)} \end{array} \right\}_{\forall P \in (O, \vec{y}_{01})}$$

$\overrightarrow{M}_{P,(0\to1)} \cdot \vec{y}_{01} = 0$, inconnues X_0, Y_0, Z_0, L_0, N_0



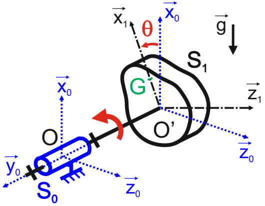
➢ Autres actions extérieures connues (pesanteur incluse) :

$$\left\{\mathcal{T}(Ext \to 1)\right\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{R}_{(Ext\to1)} \\ \\ \overrightarrow{M}_{O,(Ext\to1)} \end{array} \right\}_{O}$$

$\overrightarrow{R}_{(Ext\to1)} = X.\vec{x_0} + Y.\vec{y_0} + Z.\vec{z_0}$
$\overrightarrow{M}_{O,(Ext\to1)} = L.\vec{x_0} + M.\vec{y_0} + N.\vec{z_0}$

3.2 Conditions d'équilibrage : Etude dynamique du solide S_1

$\overrightarrow{OG} = a.\vec{x}_1 + c.\vec{y}_0$



- Expression du torseur dynamique :
  - ➢ $\overrightarrow{R}_{D(S_1/R_0)} = m.\overrightarrow{a}_{G,1/0} = -m.a.(\ddot{\theta}.\vec{z}_1 + \dot{\theta}^2.\vec{x}_1)$
  - ➢ $\overrightarrow{\delta}_{O(1/0)} = \left[\dfrac{d}{dt}\vec{\sigma}_{O(1/0)}\right]_{R_0}$

  (O est un point fixe de R_0)

  avec $\overrightarrow{\sigma}_{O(1/0)} = \mathbf{I}(O,S_1)\cdot\overrightarrow{\Omega}_{(1/0)} = \begin{bmatrix} -F.\dot{\theta} \\ B.\dot{\theta} \\ -D.\dot{\theta} \end{bmatrix}_{(\vec{x}_1,\vec{y}_0,\vec{z}_1)}$

$$\Rightarrow \overrightarrow{\delta}_{O(1/0)} = (-F.\vec{x}_1 + B.\vec{y}_0 - D.\vec{z}_1).\ddot{\theta} + (F.\vec{z}_1 - D.\vec{x}_1).\dot{\theta}^2$$

- Application du PFD dans R_0 galiléen : $\left\{\mathcal{D}_{(1/R_0)}\right\} = \left\{\mathcal{T}_{(0\to1)}\right\} + \left\{\mathcal{T}_{(Ext\to1)}\right\}$

En projection dans $(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$:

$$\begin{aligned} R_{DX} &= X_0 + X \\ 0 &= Y_0 + Y \\ R_{DZ} &= Z_0 + Z \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \delta_X &= L_0 + L \\ \delta_Y &= M \\ \delta_Z &= N_0 + N \end{aligned}$$

3.3 Conditions d'équilibrage : Actions mécaniques dans la liaison pivot

La liaison pivot supporte des efforts "tournants" en $sin\theta$ et $cos\theta$ (effet d'inertie) qui engendrent des vibrations :

$$\begin{cases} X_0 = -m.\mathbf{a}.(\dot{\theta}^2.cos\theta + \ddot{\theta}.sin\theta) - X \\ Y_0 = -Y \\ Z_0 = -m.\mathbf{a}.(\ddot{\theta}.cos\theta - \dot{\theta}^2.sin\theta) - Z \end{cases} \quad \begin{cases} L_0 = -\left(\mathbf{F}.\ddot{\theta} + \mathbf{D}.\dot{\theta}^2\right).cos\theta + \left(-\mathbf{D}.\ddot{\theta} + \mathbf{F}.\dot{\theta}^2\right).sin\theta - L \\ \\ N_0 = \left(-\mathbf{D}.\ddot{\theta} + \mathbf{F}.\dot{\theta}^2\right).cos\theta + \left(\mathbf{F}.\ddot{\theta} + \mathbf{D}.\dot{\theta}^2\right).sin\theta - N \end{cases}$$

Condition d'équilibrage **statique**

X_0 et Z_0 sont indépendants de θ si $a = 0$, c'est à dire $\overrightarrow{OG} = a.\vec{x}_1 + c.\vec{y}_0 = c.\vec{y}_0$:

Un solide en rotation est **équilibré statiquement** si **son centre d'inertie est sur l'axe de rotation**

Condition d'équilibrage **dynamique**

L_0 et N_0 sont indépendants de θ si $D = 0$ et $F = 0$, de plus $(O, \vec{y}_0)$ axe de rotation $(M_0 = 0)$:

Un solide en rotation est **équilibré dynamiquement** s'il est **équilibré statiquement**

et si **l'axe de rotation est axe principal d'inertie** $\Rightarrow \mathbf{I}(O,S_1) = \begin{bmatrix} A & 0 & -E \\ 0 & B & 0 \\ -E & 0 & C \end{bmatrix}_{O,(\vec{x}_1,\vec{y}_{01},\vec{z}_1)}$

Remarque : $\mathbf{I}(O,S_1)$ n'est pas nécessairement diagonale.

Equilibreuse de roue de véhicule

http://www.directindustry.de/

Dans la pratique les caractéristiques d'inertie du système sont inconnues, les équilibreuses permettent de déterminer les masses additionnelles par analyse des efforts cycliques sur les paliers (liaison pivot).