Dynamique des Systèmes Mécaniques
Approche Energétique - Notion de Puissance

Spé MP–MP* 2025-2026

Lycée Thiers Marseille

1- Quelques définitions

Energie

L'**énergie** est la grandeur mesurant la **capacité** d'un système à modifier l'état d'autres systèmes avec lesquels il est en interaction, en joule (J).

Travail

Le **travail** est la **manifestation** d'une transformation ou d'un transfert d'énergie, en joule (J).

Unité le joule

Un joule représente le travail que produit une force de **un newton** dont le point d'application se déplace de **un mètre** dans la direction de la force ($1 \text{ J} = 1 \text{ N.m}$).

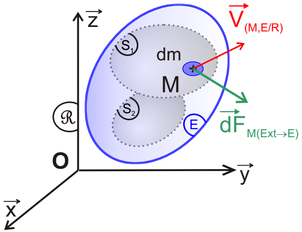
Puissance

La **puissance** est la grandeur représentative de la **vitesse** à laquelle s'effectue le travail, en watt (W).

Unité le watt

Un watt est la puissance d'une machine qui effectue un travail de **un joule** en **une seconde** ($1 \text{ W} = 1 \text{ J/s}$).

2.1 Puissance des actions mécaniques extérieures appliquées à un système matériel (E)



Torseur des actions extérieures exercées sur (E) :

$$\left\{\mathcal{T}(Ext\to E)\right\} = \left\{\begin{array}{c} \displaystyle\int_{M\in E} \overrightarrow{dF_M}(Ext \to E) \\ \displaystyle\int_{M\in E} \overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{dF_M}(Ext \to E) \end{array}\right\}_A$$

Avec $\overrightarrow{dF_M}(Ext \to E) = \overrightarrow{f_M}(Ext \to E).d\Sigma$

- $\overrightarrow{f_M}(Ext \to E)$ densité surfacique d'effort au point M : surfacique en N/m^2, ou volumique en N/m^3.
- $d\Sigma$ élément de surface (dS) ou de volume (dV).

Puissance des actions extérieures à (E) dans son mouvement par rapport à $\mathcal{R}$

par définition :

$$\boldsymbol{\mathcal{P}_{(Ext\to E/R)} = \int_E \overrightarrow{V}_{(M,E/R)} \cdot \overrightarrow{dF_M}(Ext \to E)}$$ en Watt ($W = N.m/s = kg.m^2/s^3$)

2.2 Puissance des actions mécaniques extérieures appliquées à un solide indéformable (S)

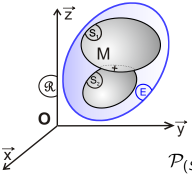
$$\begin{aligned}
\mathcal{P}_{(Ext\to S/R)} &= \int_{M\in S} \overrightarrow{V}_{(M,S/R)} \cdot d\overrightarrow{F_M}(Ext \to S) \\
&= \int_{M\in S} \left(\overrightarrow{V}_{(A,S/R)} + \overrightarrow{\Omega}_{(S/R)} \wedge \overrightarrow{AM}\right) \cdot d\overrightarrow{F_M}(Ext \to S) \\
&= \overrightarrow{V}_{(A,S/R)} \cdot \underbrace{\int_{M\in S} d\overrightarrow{F_M}(Ext \to S)}_{\overrightarrow{R}_{Ext\to S}} + \overrightarrow{\Omega}_{(S/R)} \cdot \underbrace{\int_{M\in S} \overrightarrow{AM} \wedge d\overrightarrow{F_M}(Ext \to S)}_{\overrightarrow{M}_{A(Ext\to S)}}
\end{aligned}$$

♥ ♥ ♥ A retenir...

La puissance développée par les actions mécaniques extérieures à (S) sur le solide (S) dans son mouvement par rapport à R est égale au comoment du torseur des actions mécaniques extérieures sur (S) par le torseur cinématique du mouvement de (S) par rapport à R :

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}_{(Ext\to S/R)} &= \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{R}_{(Ext\to S)} \\ \overrightarrow{M}_{A,(Ext\to S)} \end{array} \right\}_{\forall A} \otimes \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{\Omega}_{(S/R)} \\ \overrightarrow{V}_{(A,S/R)} \end{array} \right\}_{\forall A} \\
&= \left\{\mathcal{T}(\text{Ext} \to \text{S})\right\} \otimes \left\{\mathcal{V}(\text{S/R})\right\}
\end{aligned}$$

3 - Puissance des Actions Mutuelles entre 2 systèmes matériels



Puissance des efforts intérieurs à $E = (S_1 \cup S_2)$ ou des actions mutuelles entre S_1 et S_2 :

$$\mathcal{P}_{(S_1 \leftrightarrow S_2)} = \mathcal{P}_{(S_2 \rightarrow S_1/R)} + \mathcal{P}_{(S_1 \rightarrow S_2/R)}$$

$$\mathcal{P}_{(S_1 \leftrightarrow S_2)} = \{\mathcal{T}(S_2 \rightarrow S_1)\} \otimes \{\mathcal{V}(S_1/R)\} + \underbrace{\{\mathcal{T}(S_1 \rightarrow S_2)\}}_{-\left\{\mathcal{T}(S_2 \rightarrow S_1)\right\}} \otimes \{\mathcal{V}(S_2/R)\}$$

$$= \{\mathcal{T}(S_2 \rightarrow S_1)\} \otimes (\{\mathcal{V}(S_1/R)\} - \{\mathcal{V}(S_2/R)\}) = \{\mathcal{T}(S_2 \rightarrow S_1)\} \otimes \{\mathcal{V}(S_1/S_2)\}$$

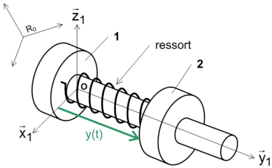
♥ Puissance développée par les actions mutuelles entre S_1 et S_2

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}_{(S_1 \leftrightarrow S_2)} &= \left\{\mathcal{T}(S_2 \rightarrow S_1)\right\} \otimes \left\{\mathcal{V}(S_1/S_2)\right\} \\
&= \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{R}_{(S_2 \rightarrow S_1)} \\ \overrightarrow{M}_{A,(S_2 \rightarrow S_1)} \end{array} \right\}_{\forall A} \otimes \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{\Omega}_{(S_1/S_2)} \\ \overrightarrow{V}_{(A,S_1/S_2)} \end{array} \right\}_{\forall A} \\
&= \mathcal{P}_{(S_2 \rightarrow S_1/S_2)} + \cancel{\mathcal{P}_{(S_1 \rightarrow S_2/S_2)}} \\
&= \cancel{\mathcal{P}_{(S_2 \rightarrow S_1/S_1)}} + \mathcal{P}_{(S_1 \rightarrow S_2/S_1)}
\end{aligned}$$

➢ **Cette puissance est indépendante du repère choisi pour la calculer**

3.1 Puissance des Actions Mutuelles entre 2 systèmes matériels : Cas du ressort

Soient les solides **1** et **2** en mouvement par rapport au référentiel galiléen R_0, en liaison pivot glissant d'axe $(O, \vec{y}_1)$.



Un ressort de raideur K, de longueur à vide L_0, de masse négligeable agit sur les solides **1** et **2** :

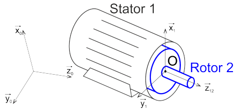
$$\left\{\mathcal{T}(res \rightarrow 1)\right\} = \left\{\begin{array}{c} K(y-L_0).\vec{y}_1 \\ \vec{0} \end{array}\right\}_O = -\left\{\mathcal{T}(res \rightarrow 2)\right\}$$

On isole le système matériel **1** $\cup$ **2** et on cherche $\mathcal{P}_{(1 \leftarrow res \rightarrow 2)}$

Puissance des actions mutuelles entre deux solides par lintermédiaire d'un ressort

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}_{(1 \leftarrow res \rightarrow 2)} &= \mathcal{P}_{(res \rightarrow 1/R)} + \mathcal{P}_{(1 \rightarrow res/R)} + \mathcal{P}_{(res \rightarrow 2/R')} + \mathcal{P}_{(2 \rightarrow res/R')} \text{ (Choix R=1 et R'=2)} \\
&= \mathcal{P}_{(1 \rightarrow res/1)} + \mathcal{P}_{(2 \rightarrow res/2)} \\
&= \left\{\mathcal{T}(1 \rightarrow res)\right\} \otimes \left\{\mathcal{V}(res/1)\right\} + \left\{\mathcal{T}(2 \rightarrow res)\right\} \otimes \left\{\mathcal{V}(res/2)\right\} \\
&= \left\{\mathcal{T}(res \rightarrow 2)\right\} \otimes \left\{\mathcal{V}(2/1)\right\} \\
&= \left\{\begin{array}{c} -K(y-L_0).\overrightarrow{y_1} \\ \overrightarrow{0} \end{array}\right\}_O \otimes \left\{\begin{array}{c} \dot{\theta}_{2/1}.\overrightarrow{y_1} \\ \dot{y}.\overrightarrow{y_1} \end{array}\right\}_O = -K(y(t)-L_0).\dot{y(t)}
\end{aligned}$$

3.2 Puissance des Actions Mutuelles entre 2 systèmes matériels : Cas d'un actionneur embarqué

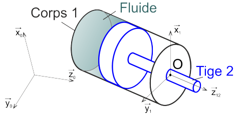


Soient le Stator **1** et le Rotor **2** d'un moteur électrique en mouvement par rapport au référentiel galiléen R_0, en liaison pivot d'axe $(O, \vec{z}_{12})$.
L'action mécanique motrice sur le Rotor **2** est :

$$\{\mathcal{T}(mot \rightarrow 2)\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{0} \\ C_m.\vec{z}_{12} \end{array} \right\}_{\forall P}$$

Puissance développée au sein d'un moteur électrique

$$\mathcal{P}_{(1 \leftarrow mot \rightarrow 2)} = \{\mathcal{T}(mot \rightarrow 2)\} \otimes \{\mathcal{V}(2/1)\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{0} \\ C_m.\vec{z}_{12} \end{array} \right\}_{\forall P} \otimes \left\{ \begin{array}{c} \dot{\theta}_m.\overrightarrow{z_{12}} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_O = \boldsymbol{C_m.\dot{\theta}_m}$$



Soient le Corps **1** et la Tige **2** d'un vérin hydraulique en mouvement par rapport au référentiel galiléen R_0, en liaison pivot glissant d'axe $(O, \vec{z}_{12})$.
L'action mécanique du fluide (pression p, section S) sur le Tige **2** est :

$$\{\mathcal{T}(Fluide \rightarrow 2)\} = \left\{ \begin{array}{c} p.S.\vec{z}_{12} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_O$$

Puissance développée par un fluide sous pression au sein d'un vérin hydraulique

$$\mathcal{P}_{(1 \leftarrow fluide \rightarrow 2)} = \{\mathcal{T}(fluide \rightarrow 2)\} \otimes \{\mathcal{V}(2/1)\} = \left\{ \begin{array}{c} p.S.\vec{z}_{12} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_O \otimes \left\{ \begin{array}{c} \dot{\theta}(t).\overrightarrow{z_{12}} \\ \dot{z}(t).\overrightarrow{z_{12}} \end{array} \right\}_O = \boldsymbol{p.S.\dot{z}(t)}$$

♥♥ Puissance dissipée dans une liaison parfaite

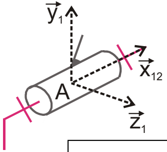
Dans une liaison parfaite au sens énergétique (pas de jeu, pas de frottement f=0), la puissance développée par les actions mutuelles entre S_1 et S_2 est nulle :

$$\boxed{\boldsymbol{\mathcal{P}_{(S_1 \leftrightarrow S_2)} = 0}}$$

Ceci traduit la dualité des torseurs cinématique et des actions mécaniques transmissibles dans les liaisons parfaites :

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}_{(S_1 \leftrightarrow S_2)} &= \left\{\mathcal{T}(S_2 \to S_1)\right\} \otimes \left\{\mathcal{V}(S_1/S_2)\right\} = \mathcal{P}_{(S_2 \to S_1/S_2)} \\
&= \left\{\mathcal{T}(S_1 \to S_2)\right\} \otimes \left\{\mathcal{V}(S_2/S_1)\right\} = \mathcal{P}_{(S_1 \to S_2/S_1)} \\
&= 0
\end{aligned}$$

3.4 Puissance des Actions Mutuelles entre 2 systèmes matériels : Liaisons de guidage avec frottement

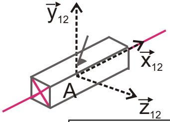


Pivot d'axe (A,$\vec{x}_{12}$)

k en $N.m.rad^{-1}$; f en $N.m.s.rad^{-1}$

$$\{\mathcal{T}(1 \rightarrow 2)\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{R}_{(1\rightarrow 2)} \\ \overrightarrow{M}_{A,(1\rightarrow 2)} \end{array} \right\}_A$$

Liaison	Particularité du torseur	Puissance dissipée
Parfaite	$\overrightarrow{M}_{A,(1\rightarrow 2)} \cdot \vec{x}_{12} = 0$	$\mathcal{P}_{(1\leftrightarrow 2)} = 0$
Avec frottement sec	$\overrightarrow{M}_{A,(1\rightarrow 2)} \cdot \vec{x}_{12} = -k.\theta$	$\mathcal{P}_{(1\leftrightarrow 2)} = -k.\theta.\dot{\theta}$
Avec frottement visqueux	$\overrightarrow{M}_{A,(1\rightarrow 2)} \cdot \vec{x}_{12} = -f.\dot{\theta}$	$\mathcal{P}_{(1\leftrightarrow 2)} = -f.\dot{\theta}^2$



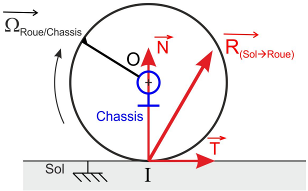
Glissière de direction $\vec{x}_{12}$

k en $N.m^{-1}$; f en $N.s.m^{-1}$

$$\{\mathcal{T}(1 \rightarrow 2)\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{R}_{(1\rightarrow 2)} \\ \overrightarrow{M}_{M,(1\rightarrow 2)} \end{array} \right\}_{\forall M}$$

Liaison	Particularité du torseur	Puissance dissipée
Parfaite	$\overrightarrow{R}_{(1\rightarrow 2)} \cdot \vec{x}_{12} = 0$	$\mathcal{P}_{(1\leftrightarrow 2)} = 0$
Avec frottement sec	$\overrightarrow{R}_{(1\rightarrow 2)} \cdot \vec{x}_{12} = -k.x$	$\mathcal{P}_{(1\leftrightarrow 2)} = -k.x.\dot{x}$
Avec frottement visqueux	$\overrightarrow{R}_{(1\rightarrow 2)} \cdot \vec{x}_{12} = -f.\dot{x}$	$\mathcal{P}_{(1\leftrightarrow 2)} = -f.\dot{x}^2$

Modèle de contact sans déformation

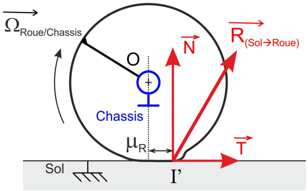


$$\mathcal{P}_{(roue \leftrightarrow sol)} = \begin{Bmatrix} \vec{R}_{(S \to R)} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_I \otimes \begin{Bmatrix} \vec{\Omega}_{(R/S)} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_I$$

Si Adhérence et RSG :

$$\boxed{\mathcal{P}_{(roue \leftrightarrow sol)} = 0}$$

Modèle de contact avec déformation



$$\mathcal{P}_{(roue \leftrightarrow sol)} = \begin{Bmatrix} \vec{R}_{(S \to R)} \\ \mu_R.N.\vec{z} \end{Bmatrix}_I \otimes \begin{Bmatrix} \vec{\Omega}_{(R/S)} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_I$$
$$= -\mu_R.N.\omega$$

Si Résistance au Roulement et RSG :

$$\boxed{\mathcal{P}_{(roue \leftrightarrow sol)} < 0}$$