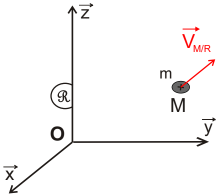
Dynamique des Systèmes Mécaniques
Approche énergétique - Théorème de l'Energie Cinétique

Spé MP–MP* 2025-2026

Lycée Thiers Marseille

1 - Théorème de l'énergie cinétique appliqué à une masse m concentrée en M



L'énergie cinétique d'une masse m concentrée en M dans son mouvement par rapport à R_g est :

$$E_{c(M/R_g)} = \frac{1}{2}.m.\left(\overrightarrow{V}_{(M/R_g)}\right)^2$$

Or

$$\frac{dE_{c(M/R_g)}}{dt} = \overrightarrow{V}_{(M/R_g)} \cdot m.\left.\frac{d\overrightarrow{V}_{(M/R_g)}}{dt}\right|_{R_g}$$

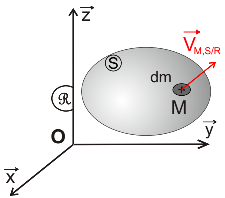
le TRD (ou 2ème loi de Newton) appliqué à la masse m dans R_g galiléen s'écrit :

$$\overrightarrow{R_d}_{(M/R_g)} = \overrightarrow{R}_{(ext \to M)}$$

Théorème de l'**E**nergie **C**inétique

TEC appliqué à un point matériel M en mouvement par rapport à R_g **galiléen** :

$$\boxed{\boldsymbol{\frac{dE_{c(M/R_g)}}{dt} = \mathcal{P}_{(Ext \to M/R_g)}}}$$



Définition : Energie cinétique (E_c ou T)

d'un solide S en mouvement par rapport à $\mathcal{R}$:

$$E_{c(S/R)} = \frac{1}{2} \int_{M \in S} \left(\overrightarrow{V}_{(M,S/R)} \right)^2 dm$$

en Joule ($J = kg.m^2/s^2 = N.m$)

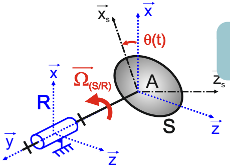
$$\begin{aligned} 2.E_{c(S/R)} &= \int_{M \in S} \left(\overrightarrow{V}_{(A,S/R)} + \overrightarrow{\Omega}_{(S/R)} \wedge \overrightarrow{AM} \right) \cdot \overrightarrow{V}_{(M,S/R)} dm \\ &= \overrightarrow{V}_{(A,S/R)} \cdot \int_{M \in S} \overrightarrow{V}_{(M,S/R)} .dm + \overrightarrow{\Omega}_{(S/R)} \cdot \int_{M \in S} \overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{V}_{(M,S/R)} .dm \end{aligned}$$

♥ ♥ ♥ A retenir...

Le double de l'énergie cinétique d'un solide S indéformable en mouvement par rapport à $\mathcal{R}$ est :

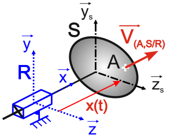
$$\boxed{2.E_{c(S/R)} = \left\{ \mathcal{C}(S/R) \right\} \otimes \left\{ \mathcal{V}(S/R) \right\}}$$

$$2.E_{c(S/R)} = \left\{ \begin{array}{c} m_S.\overrightarrow{V}_{(G,S/R)} \\ \overrightarrow{\sigma}_{A(S/R)} \end{array} \right\}_{\forall A} \otimes \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{\Omega}_{(S/R)} \\ \overrightarrow{V}_{(A,S/R)} \end{array} \right\}_{\forall A}$$
$$= m_S.\overrightarrow{V}_{(G,S/R)} \cdot \overrightarrow{V}_{(A,S/R)} + \overrightarrow{\Omega}_{(S/R)} \cdot \overrightarrow{\sigma}_{A(S/R)}$$



Solide en rotation autour d'un axe fixe passant par A, $\overrightarrow{V}_{(A,S/R)} = \vec{0}$

$$2.E_{c(S/R)} = \overrightarrow{\Omega}_{(S/R)} \cdot [\mathbf{I}(\mathrm{A,S}) \cdot \overrightarrow{\Omega}_{(S/R)}]$$



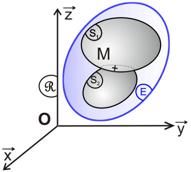
Solide en translation, $\overrightarrow{\Omega}_{(S/R)} = \vec{0}$

$$2.E_{c(S/R)} = m_S.\left(\overrightarrow{V}_{(A,S/R)}\right)^2 = m_S.\left(\overrightarrow{V}_{(G,S/R)}\right)^2$$

Calcul au point G centre d'inertie de S :

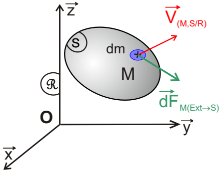
$$2.E_{c(S/R)} = \left\{ \begin{array}{c} m_S.\overrightarrow{V}_{(G,S/R)} \\ \overrightarrow{\sigma}_{G(S/R)} \end{array} \right\}_G \otimes \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{\Omega}_{(S/R)} \\ \overrightarrow{V}_{(G,S/R)} \end{array} \right\}_G$$

$$\boxed{\mathbf{2.}\boldsymbol{E_{c(S/R)}} = \boldsymbol{m_S.}\left(\overrightarrow{\boldsymbol{V}}_{\boldsymbol{(G,S/R)}}\right)^{\mathbf{2}} + \overrightarrow{\boldsymbol{\Omega}}_{\boldsymbol{(S/R)}} \cdot [\mathbf{I}(\mathrm{G,S}) \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{\Omega}}_{\boldsymbol{(S/R)}}]}$$



Système matériel $E = (S_1 \cup S_2)$

$$E_{c(E/R)} = E_{c(S_1/R)} + E_{c(S_2/R)}$$



En multipliant la relation du PFD par le torseur cinématique de S/R_g :

$$\left\{\mathcal{D}(S/R_g)\right\} = \left\{\mathcal{T}(Ext \rightarrow S)\right\}$$

$$\left\{\mathcal{D}(S/R_g)\right\} \otimes \left\{\mathcal{V}(S/R_g)\right\} = \left\{\mathcal{T}(Ext \rightarrow S)\right\} \otimes \left\{\mathcal{V}(S/R_g)\right\}$$

$$\left\{\mathcal{D}(S/R_g)\right\} \otimes \left\{\mathcal{V}(S/R_g)\right\} = \left\{\begin{array}{c} \int\limits_{M\in S} \vec{a}_{(M,S/R_g)}.dm \\ \int\limits_{M\in S} \overrightarrow{AM} \wedge \vec{a}_{(M,S/R_g)}.dm \end{array}\right\}_A \otimes \left\{\begin{array}{c} \vec{\Omega}_{(S/R_g)} \\ \vec{V}_{(A,S/R_g)} \end{array}\right\}_A$$

$$= \int\limits_{M\in S} \vec{a}_{(M,S/R_g)}.dm \cdot \vec{V}_{(A,S/R_g)} + \int\limits_{M\in S} \overrightarrow{AM} \wedge \vec{a}_{(M,S/R_g)}.dm \cdot \vec{\Omega}_{(S/R_g)}$$

$$= \int\limits_{M\in S} \vec{a}_{(M,S/R_g)} \cdot \underbrace{\left(\vec{V}_{(A,S/R_g)} + \vec{\Omega}_{(S/R_g)} \wedge \overrightarrow{AM}\right)}_{\vec{V}_{(M,S/R_g)}} .dm$$

$$= \int\limits_{M\in S} \left.\frac{d\vec{V}_{(M,S/R_g)}}{dt}\right|_{R_g} \cdot \vec{V}_{(M,S/R_g)}.dm = \frac{1}{2} \int\limits_{M\in S} \frac{d}{dt} \left(\vec{V}_{(M,S/R_g)}\right)^2 .dm$$

3.1 Théorème de l'Energie Cinétique
Cas du solide indéformable S

D'après le principe de conservation de la masse :

$$\left\{\mathcal{D}(S/R_g)\right\} \otimes \left\{\mathcal{V}(S/R_g)\right\} = \frac{1}{2}\int_{M\in S} \frac{d}{dt}\left(\overrightarrow{V}_{(M,S/R_g)}\right)^2 .dm = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_{M\in S}\left(\overrightarrow{V}_{(M,S/R_g)}\right)^2 .dm$$

$$\Rightarrow \underbrace{\left\{\mathcal{D}(S/R_g)\right\} \otimes \left\{\mathcal{V}(S/R_g)\right\}} = \underbrace{\left\{\mathcal{T}(Ext \rightarrow S)\right\} \otimes \left\{\mathcal{V}(S/R_g)\right\}}$$

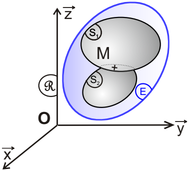
♥ ♥ **T**héorème de l'**E**nergie **C**inétique (ou Théorème de l'Energie-Puissance)

TEC appliqué au solide S **indéformable** en mouvement par rapport à R_g **galiléen** :

$$\boxed{\frac{dE_{c(S/R_g)}}{dt} = \mathcal{P}_{(Ext\rightarrow S/R_g)}}$$

Remarques :

- La relation issue du TEC n'est pas une nouvelle équation mais une autre expression du PFD.
- Le TEC est bien adapté et efficace pour trouver la loi du mouvement d'un mécanisme à une seule mobilité.
- La **loi du mouvement** est une équation dans laquelle il n'y a pas d'inconnue de liaison.



On applique le TEC à S_1 et à S_2 en mouvement par rapport à R_g galiléen :

- $$\frac{dE_{c(S_1/R_g)}}{dt} = \mathcal{P}_{(Ext \text{ à } (S_1 \cup S_2) \rightarrow S_1/R_g)} + \mathcal{P}_{(S_2 \rightarrow S_1/R_g)}$$
- $$\frac{dE_{c(S_2/R_g)}}{dt} = \mathcal{P}_{(Ext \text{ à } (S_1 \cup S_2) \rightarrow S_2/R_g)} + \mathcal{P}_{(S_1 \rightarrow S_2/R_g)}$$

Le TEC appliqué à $E = (S_1 \cup S_2)$ en mouvement par rapport à R_g galiléen s'écrit :

$$\frac{dE_{c((S_1 \cup S_2)/R_g)}}{dt} = \mathcal{P}_{(Ext \text{ à } (S_1 \cup S_2) \rightarrow (S_1 \cup S_2)/R_g)} + \mathcal{P}_{(S_2 \leftrightarrow S_1)}$$

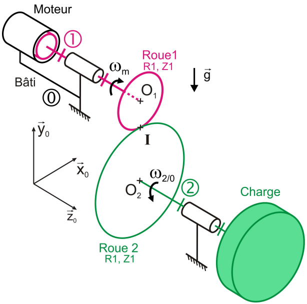
♥ ♥ ♥ **T**héorème de l'**E**nergie **C**inétique (ou Théorème de l'Energie-Puissance)

TEC appliqué à un système matériel en mouvement par rapport à R_g **galiléen** :

$$\boxed{\frac{d\boldsymbol{E}_{c(E/R_g)}}{dt} = \mathcal{P}_{(Ext \rightarrow E/R_g)} + \mathcal{P}_{(Int \text{ à } E)}}$$

La dérivée temporelle de l'énergie cinétique de E en mouvement par rapport à R_g est égale à la puissance galiléenne des AM extérieures sur E dans son mouvement par rapport à R_g + puissance des actions intérieures à E (= puissance des actions mutuelles entre chaque solide de E)

Application 1 - Enoncé



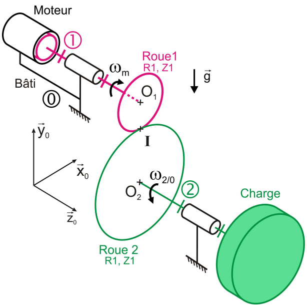
$(1) = \{$Arbre 1, Roue 1, rotor moteur$\}$ en rotation / arbre moteur $(O_1, \vec{z}_0)$		
masse m_1	moment d'inertie J_1 par rapport à $(O_1, \vec{z}_0)$	vitesse de rotation $\omega_m = \omega_{1/0}$
$(O_1, \vec{z}_0)$ axe de symétrie matérielle		
$(2) = \{$Arbre 2, Roue 2, charge$\}$ en rotation / arbre récepteur $(O_2, \vec{z}_0)$		
masse m_2	moment d'inertie J_2 par rapport à $(O_2, \vec{z}_0)$	vitesse de rotation $\omega_{2/0}$
$(O_2, \vec{z}_0)$ axe de symétrie matérielle		

Hypothèses :

- Rapport de transmission du réducteur ρ.
- Le moteur délivre un couple $\vec{C}_{mot\rightarrow rotor} = C_m.\vec{z}_0$.
- Toutes les liaisons sont parfaites.

Objectif : **Déterminer** l'inertie équivalente de l'ensemble mobile $\Sigma = \{1 \cup 2\}$ ramenée sur l'axe moteur $(O_1, \vec{z}_0)$ et **calculer** le couple moteur C_m.

4.2 Inertie équivalente d'un ensemble mobile ramenée sur l'axe moteur Application 1 - Définition et démarche de calcul



On isole "tout ce qui bouge" : $\Sigma = \{1 \cup 2\}$

1. **Enoncer** le TEC appliqué à Σ en mvt dans R_0 galiléen.

$$\boxed{\frac{d E_{c(\Sigma/R_0)}}{dt} = \mathcal{P}_{(Ext \to \Sigma/R_0)} + \mathcal{P}_{(Int \text{ à } \Sigma)}}$$

2. **Exprimer** $2.E_{c(\Sigma/R_0)}$.
   2.a **Ecrire** la relation cinématique entre ω_m et $\omega_{2/0}$.
   2.b **Mettre en évidence** le terme d'inertie équivalente ramenée sur l'axe moteur.

Inertie équivalente ramenée sur l'axe moteur

L'**inertie équivalente** J_{eq} de l'ensemble mobile Σ ramenée sur l'axe moteur $(O_1, \vec{z}_0)$ est telle que :

$$\boxed{2.E_{c(\Sigma/R_0)} = J_{eq}.\omega_m^2}$$

Rappel : si $\Sigma = \{S_1, S_2, ..., S_n\}$ $\quad E_{c(\Sigma/R_0)} = \sum_{i=1}^{n} E_{c(S_i/R_0)}$

4.2 Inertie équivalente d'un ensemble mobile ramenée sur l'axe moteur Application 1 - Définition et démarche de calcul

2. Energie cinétique de l'ensemble mobile par rapport à R_0 :

$$\boxed{2.E_{c(\Sigma/R_0)} = J_1.\omega_m^2 + J_2.\omega_{2/0}^2}$$

➤ en rotation : $2.E_{c(S_i/R_0)} = J_i.\omega_{i/0}^2$; en translation : $2.E_{c(S_i/R_0)} = m_i.V_{i/0}^2$

2.a Rapport de transmission dans l'engrenage :

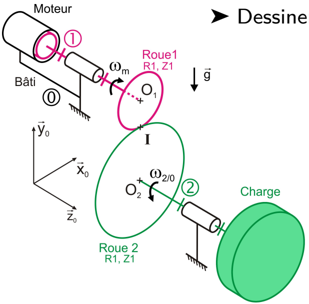
$$\boxed{\rho = \frac{\omega_{2/0}}{\omega_m} = -\frac{R1}{R2} = -\frac{Z1}{Z2}}$$

➤ Connaître les lois E/S cinématiques dans les poulies/courroie, vis-écrou, pignon-crémaillère.
➤ Dessiner la chaine de transmission afin de ne rien oublier.

2.b Inertie équivalente ramenée sur l'axe moteur :
$2.E_{c(\Sigma/R_0)} = (J_1 + J_2.\rho^2).\omega_m^2$
$2.E_{c(\Sigma/R_0)} = \underbrace{(J_1 + J_2.\rho^2)}_{J_{eq}}.\omega_m^2$

$$\boxed{J_{eq} = J_1 + J_2.\rho^2}$$

Application 1 - Mise en oeuvre du TEC : calcul du couple moteur

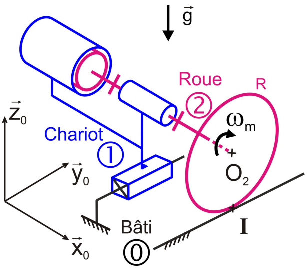


➤ Dessiner le graphe des liaisons (au brouillon, ou sur copie si demandé)

On isole "tout ce qui bouge" : $\Sigma = \{1 \cup 2\}$

1. **Enoncer** le TEC appliqué à Σ en mouvement dans R_0 galiléen.
2. **Exprimer** $2.E_{c(\Sigma/R_0)}$.
3. **Faire** le bilan des $\mathcal{P}_{(Ext \to \Sigma/R_0)}$ et des $\mathcal{P}_{(Int\ \text{à}\ \Sigma)}$.
4. **En déduire** l'expression du couple moteur C_m.

Application 2 - Moteur embarqué



(1) = {chariot 1, stator moteur} en translation selon $\vec{y}_0$		
masse	centre de gravité	vitesse
m_1	G_1	V

(2) = {Arbre 2, Roue 2, rotor moteur} en rotation / $(O_2, \vec{x}_0)$		
masse	moment d'inertie J_2	vitesse de rotation
m_2	par rapport à $(O_2, \vec{x}_0)$	$\omega_m = \omega_{2/1}$
$(O_2, \vec{x}_0)$ axe de symétrie matérielle		

Hypothèses :

- Le moteur délivre un couple $\vec{C}_{mot \to rotor} = C_m.\vec{x}_0$.
- Toutes les liaisons sont parfaites, sauf la liaison L_{02}.
- RSG au point I entre 2 et 0.

Objectif : **Déterminer** l'inertie équivalente de l'ensemble mobile $\Sigma = 1 \cup 2$ ramenée sur l'axe moteur $(O_1, \vec{x}_0)$ et **calculer** le couple moteur C_m.