

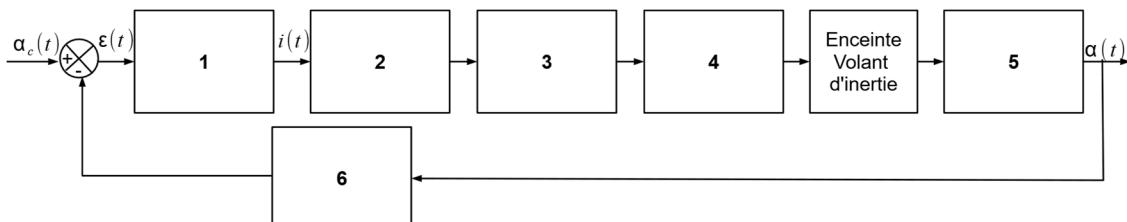
DS2 MP-MP* 2025-2026

Stabilisateur gyroscopique de bateau

3- Modélisation du système de contrôle

3.2 Architecture du système

Question 2 A l'aide du texte descriptif, compléter le tableau du document réponses associé aux constituants



Repères	Constituants du schéma-blocs
1	contrôleur électronique
2	servo-distributeur
3	vérins

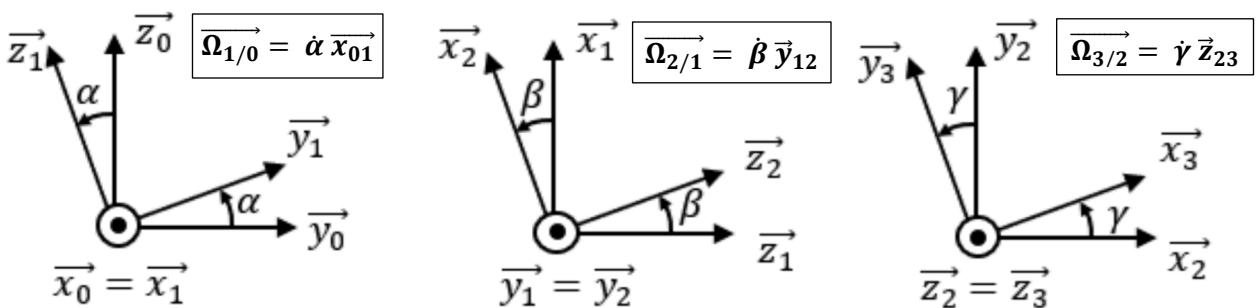
Repères	Constituants du schéma-blocs
4	structure articulée
5	dynamique du bateau/axe de roulis
6	centrale inertie

3.2 Modélisation de la chaîne d'énergie

3.2.1 Stabilisateur gyroscopique et bateau

Question 3 Compléter les figures de changement de bases associées au paramétrage des 3 rotations.

Déterminer le vecteur vitesse angulaire $\vec{\Omega}_{3/0}$ en l'exprimant dans la base associée au repère R_2 .



$$\vec{\Omega}_{3/0} = \dot{\alpha} \cdot \cos\beta \cdot \vec{x}_2 + \dot{\beta} \cdot \vec{y}_2 + (\dot{\alpha} \cdot \sin\beta + \dot{\gamma}) \cdot \vec{z}_2 \quad \text{avec } \dot{\gamma} = \omega_m$$

Question 4 Justifier la forme de la matrice d'inertie du volant 3.

Le volant d'inertie 3 possède un axe de symétrie de révolution : ($0, \vec{z}_3$) . Par conséquent :

- il possède 2 plans de symétrie différents, la matrice est donc diagonale.
- par symétrie $x \leftrightarrow y$: $A_3 = \int_{S3} y^2 + z^2 dm = \int_{S3} x^2 + z^2 dm = B_3$

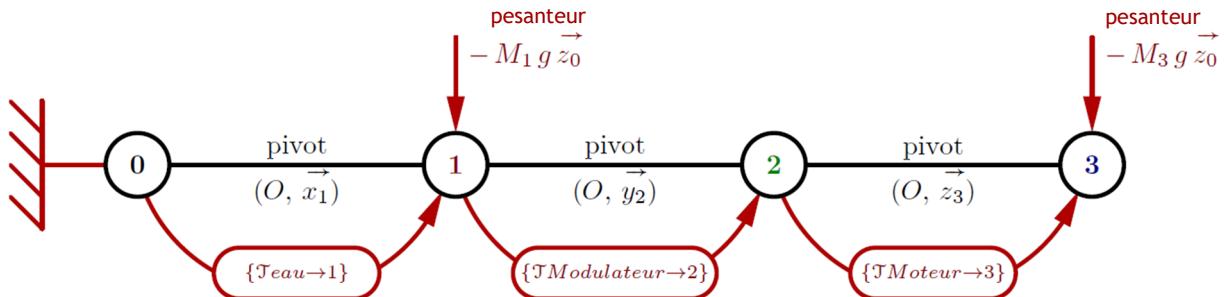
D'où une matrice en **0** de la forme :

$$[I(0, 3)] = \begin{bmatrix} A_3 & 0 & 0 \\ 0 & A_3 & 0 \\ 0 & 0 & C_3 \end{bmatrix}_{(-, -, \vec{z}_{23})}$$

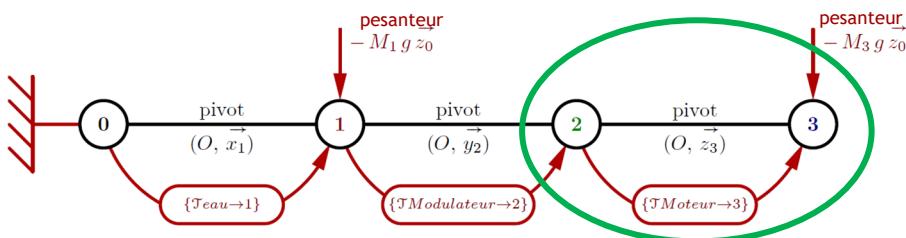
Commentaire :

→ Ne pas oublier le point lorsque vous donnez un élément de symétrie (plan ou axe)

Question 5 Compléter le graphe des liaisons du document réponses. Vous y ferez apparaître notamment l'ensemble des actions mécaniques autres que celles transmissibles par les liaisons.



Question 6 En appliquant le Principe Fondamental de la Dynamique à l'ensemble {2,3}, déterminer l'équation de mouvement donnant l'évolution du paramètre $\beta(t)$.



On isole {2,3}, Bilan des Actions Mécaniques Extérieures :

- $\{\tau_{pes \rightarrow 3}\} = \left\{ \begin{array}{l} -M_3 g \bar{z}_0 \\ 0 \end{array} \right\}_0$ (connu)
 - Pivot (O, \bar{y}_2) $\{\tau_{1 \rightarrow 2}\} = \left\{ \begin{array}{l} \bar{R}_{1 \rightarrow 2} \\ M_{0,1 \rightarrow 2} \end{array} \right\}_{\forall P \in (O, \bar{y}_2)}$
- avec $\overrightarrow{M_{0,1 \rightarrow 2}} \cdot \bar{y}_2 = 0$ (inconnues à éliminer)
- $\{\tau_{Modulateur \rightarrow 2}\} = \left\{ \begin{array}{l} \bar{R}_h(t) \\ C_h(t) \bar{y}_2 \end{array} \right\}_0$ (connu)

{2,3} est en mouvement dans R0 galiléen, on applique le Théorème du Moment Dynamique (TMD) en O projeté sur \bar{y}_2 , afin de trouver l'équation recherchée sans faire intervenir les inconnues de la liaison pivot 1 → 2 :

$$\overrightarrow{\delta_{O,\{2,3\}/0}} \cdot \bar{y}_2 = \underbrace{\overrightarrow{\delta_{O,pes \rightarrow 3}}}_{\vec{0}} \cdot \bar{y}_2 + \underbrace{\overrightarrow{M_{0,1 \rightarrow 2}} \cdot \bar{y}_2}_{\vec{0}} + C_h(t)$$

Détails du calcul de $\overrightarrow{\delta_{O,\{2,3\}/0}} \cdot \bar{y}_2$

- $\overrightarrow{\delta_{O,\{2,3\}/0}} = \underbrace{\overrightarrow{\delta_{O,2/0}}}_{\vec{0}} + \underbrace{\overrightarrow{\delta_{O,3/0}}}_{\vec{0}}$ car masse et inertie de 2 négligées
 - $\overrightarrow{\delta_{O,3/0}} = \frac{d \overrightarrow{\sigma_{O,3/0}}}{dt} \Big|_0$ car O est le centre d'inertie de 3
 - $\overrightarrow{\sigma_{O,3/0}} = [I(O, 3)] \cdot \overrightarrow{\Omega_{3/0}} = \begin{bmatrix} A_3 & 0 & 0 \\ 0 & A_3 & 0 \\ 0 & 0 & C_3 \end{bmatrix}_{Base 2} \cdot \begin{bmatrix} \dot{\alpha} \cdot \cos \beta \\ \dot{\beta} \\ \dot{\alpha} \cdot \sin \beta + \dot{\gamma} \end{bmatrix}_{Base 2}$
- $$= A_3 \dot{\alpha} \cdot \cos \beta \cdot \bar{x}_2 + A_3 \dot{\beta} \cdot \bar{y}_2 + C_3 (\dot{\alpha} \cdot \sin \beta + \dot{\gamma}) \cdot \bar{z}_2$$

Commentaire :

- TOUJOURS écrire :

- « On isole... »
- « BAME... »
- « hypothèse :... en mouvement/R galiléen »
- Enoncer le théorème

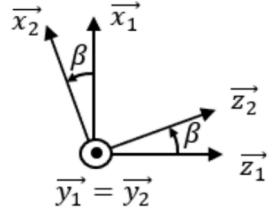
- BAME = Bilan des Actions Mécaniques EXTÉRIEURES, l'action du moteur est une action INTÉRIEURE !

- $\left. \frac{d \overrightarrow{\sigma_{O,3/0}}}{dt} \right|_0 \cdot \overrightarrow{y_2} = \frac{d \overrightarrow{\sigma_{O,3/0}} \cdot \overrightarrow{y_2}}{dt} - \overrightarrow{\sigma_{O,3/0}} \cdot \left. \frac{d \overrightarrow{y_2}}{dt} \right|_0$ avec $\left. \frac{d \overrightarrow{y_2}}{dt} \right|_0 + \overrightarrow{\Omega_{2/0}} \wedge \overrightarrow{y_2} = (\dot{\alpha} \overrightarrow{x_{01}} + \dot{\beta} \overrightarrow{y_{12}}) \wedge \overrightarrow{y_2} = \dot{\alpha} \overrightarrow{z_1}$

$$\overrightarrow{\delta_{O,3/0}} \cdot \overrightarrow{y_2} = \left. \frac{d \overrightarrow{\sigma_{O,3/0}}}{dt} \right|_0 \cdot \overrightarrow{y_2} = A_3 \ddot{\beta} - (A_3 \dot{\alpha} \cos \beta \overrightarrow{x_2} + A_3 \dot{\beta} \overrightarrow{y_{12}} + C_3 (\dot{\alpha} \sin \beta + \dot{\gamma}) \overrightarrow{z_2}) \cdot \dot{\alpha} \overrightarrow{z_1}$$

$$\overrightarrow{\delta_{O,3/0}} \cdot \overrightarrow{y_2} = A_3 \ddot{\beta} - \left(A_3 \dot{\alpha}^2 \cos \beta \underbrace{\overrightarrow{x_2} \cdot \overrightarrow{z_1}}_{-\sin \beta} + A_3 \dot{\alpha} \dot{\beta} \underbrace{\overrightarrow{y_{12}} \cdot \overrightarrow{z_1}}_0 + C_3 (\dot{\alpha}^2 \sin \beta + \dot{\alpha} \dot{\gamma}) \underbrace{\overrightarrow{z_2} \cdot \overrightarrow{z_1}}_{\cos \beta} \right)$$

Donc $\overrightarrow{\delta_{O,\{2,3\}/0}} \cdot \overrightarrow{y_2} = A_3 \ddot{\beta} + (A_3 - C_3) \dot{\alpha}^2 \cos \beta \sin \beta - C_3 \dot{\alpha} \dot{\gamma} \cos \beta$



Conclusion :

TMD en O projeté sur $\overrightarrow{y_2}$ donne $\boxed{C_h(t) = A_3 \ddot{\beta} + (A_3 - C_3) \dot{\alpha}^2 \cos \beta \sin \beta - C_3 \dot{\alpha} \dot{\gamma} \cos \beta}$

Question 7 Linéariser l'équation de mouvement obtenue à la **Question 6** en tenant compte des hypothèses formulées précédemment. L'équation sera mise sous la forme suivante, où vous préciserez l'expression de I_g .

$$A_3 \ddot{\beta} + (A_3 - C_3) \dot{\alpha}^2 \cos \beta \sin \beta - C_3 \dot{\alpha} \dot{\gamma} \cos \beta = C_h(t)$$

au voisinage de $\alpha=0$ et $\beta=0 \Rightarrow A_3 \ddot{\beta} + (A_3 - C_3) \dot{\alpha}^2 \beta - C_3 \dot{\alpha} \dot{\gamma} = C_h(t)$

Or $\dot{\alpha}^2$ est négligeable devant les autres termes, on a donc :

$$A_3 \ddot{\beta} - C_3 \dot{\alpha} \dot{\gamma} = C_h(t)$$

$$\boxed{A_3 \ddot{\beta} = C_h(t) + C_3 \dot{\alpha} \dot{\gamma}}$$

Par identification, on en déduit donc :

$$\boxed{I_g = A_3}$$

Question 8 A partir des deux équations de dynamique (**eq 1**, **eq 2**), déterminer la fonction de transfert $H(p)$ telle que $\alpha(p) = H(p) \cdot C_{mer}(p)$ (avec $C_h = 0$) et la mettre sous la forme $\frac{1}{K + A_p + B \cdot p^2}$ où les expressions de K , A et B seront précisées. Indiquer en le justifiant si le système, de fonction de transfert $H(p)$, est stable.

L'application de la transformée de Laplace aux équations 1 et 2 avec conditions initiales nulles donne :

(**eq 1**) $I_g \cdot p^2 \cdot \beta(p) = C_3 \cdot \omega_m \cdot p \cdot \alpha(p)$

(**eq 2**) $I_b \cdot p^2 \cdot \alpha(p) + C_3 \cdot \omega_m \cdot p \cdot \beta(p) = C_{mer}(p) - f_b \cdot p \cdot \alpha(p) - k_b \cdot \alpha(p)$

En éliminant la fonction $\beta(p)$ dans ces équations, on a :

$$\left[I_b \cdot p^2 + f_b \cdot p + k_b + \frac{C_3^2 \cdot \omega_m^2}{I_g} \right] \cdot \alpha(p) = C_{mer}(p)$$

Soit :

$$\frac{\alpha(p)}{C_{mer}(p)} = \frac{1}{I_b \cdot p^2 + f_b \cdot p + k_b + \frac{C_3^2 \cdot \omega_m^2}{I_g}}$$

Par identification, on a donc :

$$\boxed{K = k_b + \frac{C_3^2 \cdot \omega_m^2}{I_g}; A = f_b; B = I_b}$$

Il s'agit d'un système du second ordre dont tous les coefficients du dénominateur sont positifs. Le système est donc stable.

3.2.2 Modélisation de la structure articulée

Question 9 Déterminer une équation donnant l'évolution de λ_a en fonction de β et une autre équation reliant l'angle γ_a en fonction β .

Par fermeture vectorielle :

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BO} = \vec{0} \Leftrightarrow e \cdot \overrightarrow{z_2} - \lambda_a \cdot \overrightarrow{x_{3a}} + L \cdot \overrightarrow{x_1} - d \cdot \overrightarrow{z_1} = \vec{0}$$

avec $\overrightarrow{z_2} = \cos\beta \overrightarrow{z_1} + \sin\beta \overrightarrow{x_1}$ et $\overrightarrow{x_{3a}} = -\sin\gamma_a \overrightarrow{z_1} + \cos\gamma_a \overrightarrow{x_1}$

d'où le système en projection dans la base 1 :

$$\begin{aligned} \cdot \overrightarrow{z_1} \left\{ e \cos\beta + \lambda_a \sin\gamma_a - d = 0 \text{ (E1)} \right. \\ \cdot \overrightarrow{x_1} \left\{ e \sin\beta - \lambda_a \cos\gamma_a + L = 0 \text{ (E2)} \right. \end{aligned} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_a \sin\gamma_a = d - e \cos\beta \text{ (E1)} \\ \lambda_a \cos\gamma_a = L + e \sin\beta \text{ (E2)} \end{cases}$$

Pour déterminer $\lambda_a(\beta)$ on élimine γ_a en faisant $(E1)^2 + (E2)^2$:

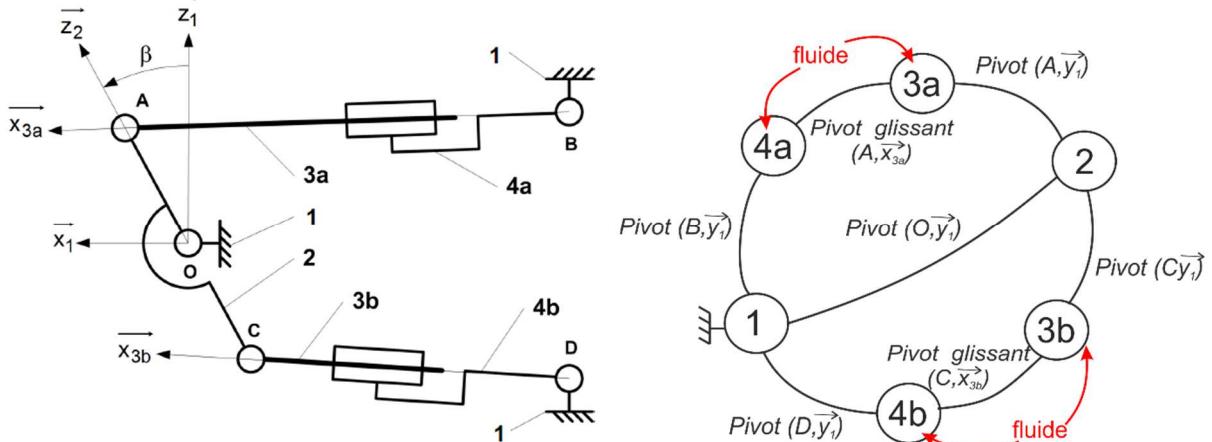
$$\lambda_a^2 \cdot (\sin^2 \gamma_a + \cos^2 \gamma_a) = (d - e \cos\beta)^2 + (L + e \sin\beta)^2$$

$$\boxed{\lambda_a = \sqrt{(d - e \cos\beta)^2 + (L + e \sin\beta)^2}} \quad (\lambda_a > 0)$$

Pour déterminer $\gamma_a(\beta)$ on élimine λ_a en faisant $(E1)/(E2)$:

$$\tan\gamma_a = \frac{\sin\gamma_a}{\cos\gamma_a} = \frac{d - e \cos\beta}{L + e \sin\beta} \Rightarrow \boxed{\gamma_a = \arctan\left(\frac{d - e \cos\beta}{L + e \sin\beta}\right)}$$

Commentaire : Méthode ultra classique à connaître !!



Question 10 Justifier que $\vec{F}_a = F_a \overrightarrow{x_{3a}}$ (respectivement $\vec{F}_b = F_b \overrightarrow{x_{3b}}$). Détails le ou les systèmes mécaniques isolés, le bilan des actions mécaniques extérieures s'exerçant sur ces systèmes, le ou les théorèmes généraux utilisés.

On isole {3a, 4a, fluide}, Bilan des Actions Mécaniques Extérieures :

- Pivot $(B, \overrightarrow{y_1}) \{ \tau_{1 \rightarrow 4a} \} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{R_{1 \rightarrow 4a}} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_B \quad (\overrightarrow{M_{B,1 \rightarrow 4a}} \cdot \overrightarrow{y_1} = 0)$

2D

- Pivot $(A, \overrightarrow{y_1}) \{ \tau_{2 \rightarrow 3a} \} = \left\{ \begin{array}{c} -\overrightarrow{F_a} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_A \quad (\overrightarrow{M_{A,2 \rightarrow 3a}} \cdot \overrightarrow{y_1} = 0) \quad \vec{F}_a = \overrightarrow{R_{3a \rightarrow 2}}$

2D

{3a,4a,fluide} est en mouvement dans R0 galiléen, les quantités dynamiques associées aux vérins sont supposées négligeables, on applique le Théorème du Moment Satique (TMS) en B :

$$\vec{0} = \underbrace{\overrightarrow{M_{B,1 \rightarrow 4a}}}_{\vec{0}} + \overrightarrow{M_{B,2 \rightarrow 3a}} = \overrightarrow{BA} \wedge (-\overrightarrow{F_a})$$

Or $\overrightarrow{BA} = \lambda_a \cdot \overrightarrow{x_{3a}}$ donc $\overrightarrow{x_{3a}} \wedge \overrightarrow{F_a} = \vec{0} \Rightarrow \boxed{\overrightarrow{F_a} = F_a \overrightarrow{x_{3a}}}$

De même en isolant {3b,4b,fluide} et en appliquant le TMS en D, on montre que $\overrightarrow{x_{3b}} \wedge \overrightarrow{F_b} = \vec{0} \Rightarrow \boxed{\overrightarrow{F_b} = F_b \overrightarrow{x_{3b}}}$

Commentaire :

TOUJOURS isoler les solides soumis à 2 glisseurs (vérins, bielles...) pour diminuer le nombre d'inconnues.

- ☛ On peut simplement rédiger ainsi « le solide... est à l'équilibre dans R galiléen sous l'action de 2 glisseurs en A et en B, les actions en A et en B ont même axe central sont donc dirigées par (AB) »
- ☛ Il faut aussi connaître la démonstration (TMD au point B pour garder l'action en A) et l'écrire sur forme vectorielle.

Question 11 Déterminer le moment C_h correspondant à la somme des moments en O exercés par les deux vérins.

Par définition $C_h = (\overrightarrow{M_{O,F_a}} + \overrightarrow{M_{O,F_b}}) \cdot \overrightarrow{y_1}$

- Vérin a en A $\{\tau_{3a \rightarrow 2}\} = \begin{cases} \overrightarrow{F_a} \\ \vec{0} \end{cases}_A$ ($2D: \overrightarrow{M_{A,2 \rightarrow 3a}} = \vec{0}$)
- Vérin b en C $\{\tau_{3b \rightarrow 2}\} = \begin{cases} \overrightarrow{F_b} \\ \vec{0} \end{cases}_C$ ($2D: \overrightarrow{M_{C,2 \rightarrow 3b}} = \vec{0}$)

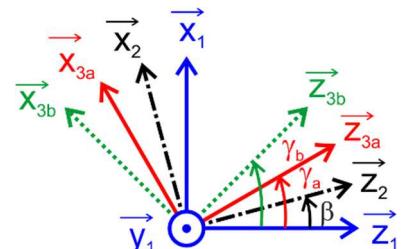
Avec $\overrightarrow{M_{O,F_a}} \cdot \overrightarrow{y_1} = (\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{F_a}) \cdot \overrightarrow{y_1} = (e \overrightarrow{z_2} \wedge F_a \overrightarrow{x_{3a}}) \cdot \overrightarrow{y_1} = e \cdot F_a \left(\underbrace{\overrightarrow{y_1} \wedge \overrightarrow{z_2}}_{\overrightarrow{x_2}} \right) \cdot \overrightarrow{x_{3a}}$

$$\overrightarrow{M_{O,F_a}} \cdot \overrightarrow{y_1} = e \cdot F_a \cdot \cos(\gamma_a - \beta)$$

Et $\overrightarrow{M_{O,F_b}} \cdot \overrightarrow{y_1} = (\overrightarrow{OC} \wedge \overrightarrow{F_b}) \cdot \overrightarrow{y_1} = (-e \overrightarrow{z_2} \wedge F_b \overrightarrow{x_{3b}}) \cdot \overrightarrow{y_1} = -e \cdot F_b \left(\underbrace{\overrightarrow{y_1} \wedge \overrightarrow{z_2}}_{\overrightarrow{x_2}} \right) \cdot \overrightarrow{x_{3b}}$

$$\overrightarrow{M_{O,F_b}} \cdot \overrightarrow{y_1} = -e \cdot F_b \cdot \cos(\gamma_b - \beta)$$

Donc $\boxed{C_h = e \cdot F_a \cdot \cos(\gamma_a - \beta) - e \cdot F_b \cdot \cos(\gamma_b - \beta)}$



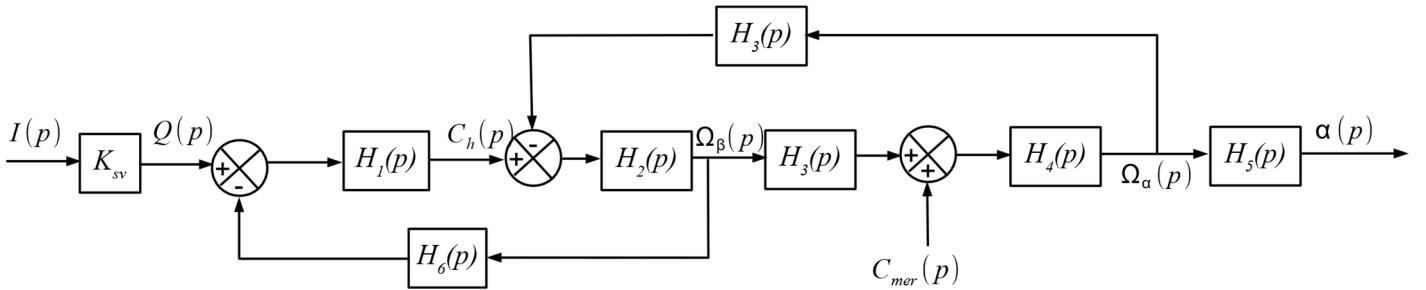
Question 12 A partir de la courbe Figure 9, formuler une hypothèse sur les angles γ_a et γ_b sachant que l'angle β varie entre $\pm 45^\circ = \pm 0.7 \text{ rad}$. En déduire une relation approchée sur le moment C_h tenant compte de l'hypothèse formulée.

Au voisinage $\beta = \pm 0.7 \text{ rad}$, l'angle γ_a reste très faible ($< 0.1 \text{ rad}$), on peut considérer $\boxed{\gamma_a \approx 0 \text{ ou } \gamma_a \ll \beta}$

Du fait de la structure donnée figure 8, il en sera de même pour γ_b : $\boxed{\gamma_b \approx 0 \text{ ou } \gamma_b \ll \beta}$

Le moment C_h vérifie donc la relation approchée suivante : $\boxed{C_h = e \cdot \cos(\beta)(F_a - F_b)}$

Question 13 A l'aide des équations (eq 1, eq 2, eq 3) et en supposant les conditions initiales nulles, donner les fonctions de transfert $H_1(p)$ à $H_6(p)$ du schéma-blocs du document réponses.



$$\omega_\alpha(t) = \frac{d\alpha(t)}{dt} \xrightarrow{\mathcal{L}} \Omega_\alpha(p) = p \cdot \alpha(p) \Rightarrow \alpha(p) = \frac{1}{p} \cdot \Omega_\alpha(p)$$

H5(p)

$$(eq\ 1)\ I_g \cdot p^2 \cdot \beta(p) = C_h(p) + C_3 \cdot \omega_m \cdot p \cdot \alpha(p) \Rightarrow \underbrace{p \cdot \beta(p)}_{\Omega_\beta(p)} = \frac{1}{I_g \cdot p} \left[C_h(p) - \underbrace{(-C_3 \cdot \omega_m) \cdot p \cdot \alpha(p)}_{H3(p)} \right]$$

$$(eq\ 2)\ I_b \cdot p^2 \cdot \alpha(p) + C_3 \cdot \omega_m \cdot p \cdot \beta(p) = C_{mer}(p) - f_b \cdot p \cdot \alpha(p) - k_b \cdot \alpha(p)$$

$$\Rightarrow \underbrace{p \cdot \alpha(p)}_{\Omega_\alpha(p)} = \underbrace{\frac{1}{I_b \cdot p + f_b + \frac{k_b}{p}}}_{H4(p)} \left[C_{mer}(p) - C_3 \cdot \omega_m \cdot \underbrace{p \cdot \beta(p)}_{\Omega_\beta(p)} \right]$$

$$(eq\ 3)\ Q(p) = S \cdot e \cdot p \cdot \beta(p) + \frac{V_0}{2 \cdot B \cdot S \cdot e} \cdot p \cdot C_h(p) \Rightarrow C_h(p) = \frac{2 \cdot B \cdot S \cdot e}{V_0 \cdot p} [Q(p) - \underbrace{S \cdot e \cdot p \cdot \beta(p)}_{H6(p)}]$$

$$H_1(p) = \frac{2 \cdot B \cdot S \cdot e}{V_0 \cdot p}$$

$$H_4(p) = \frac{p}{I_b \cdot p^2 + f_b \cdot p + k_b}$$

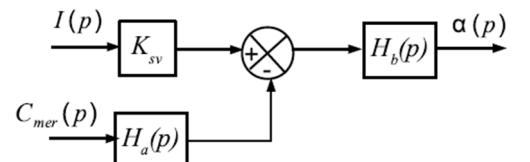
$$H_2(p) = \frac{1}{I_g \cdot p}$$

$$H_5(p) = \frac{1}{p}$$

$$H_3(p) = -C_3 \cdot \omega_m$$

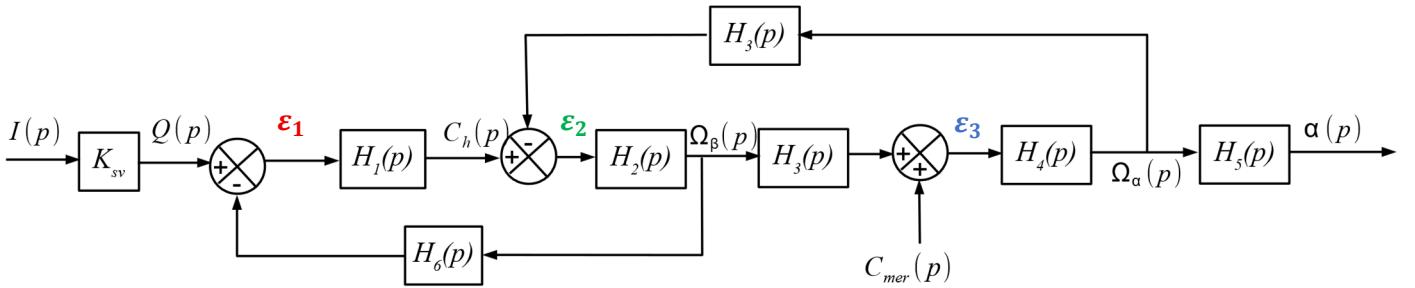
$$H_6(p) = S \cdot e$$

Question 14 Montrer que ce schéma-blocs peut être mis sous la forme donnée où l'on précisera l'expression de H_b et H_a en fonction de $H1$ à $H6$ uniquement.



A partir du schéma-blocs donné dans l'énoncé, on veut :

$$\alpha(p) = H_b(p) \cdot (K_{sv} \cdot I(p) - H_a(p) \cdot C_{mer}(p))$$



D'après le schéma-blocs initial, on a :

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_1(\mathbf{p}) &= \mathbf{K}_{sv} \cdot \mathbf{I}(\mathbf{p}) - H_2(p) \cdot H_6(p) \cdot \varepsilon_2(\mathbf{p}) \\ \varepsilon_2(\mathbf{p}) &= H_1(p) \cdot \varepsilon_1(\mathbf{p}) - \frac{H_3(p)}{H_5(p)} \alpha(\mathbf{p}) \end{aligned} \right\} \quad \begin{aligned} \varepsilon_2(\mathbf{p}) &= H_1(p) \cdot [\mathbf{K}_{sv} \cdot \mathbf{I}(\mathbf{p}) - H_2(p) \cdot H_6(p) \cdot \varepsilon_2(\mathbf{p})] - \frac{H_3(p)}{H_5(p)} \alpha(\mathbf{p}) \\ \Rightarrow \varepsilon_2(\mathbf{p}) &= \frac{1}{1 + H_1(p) \cdot H_2(p) \cdot H_6(p)} \left[H_1(p) \cdot \mathbf{K}_{sv} \cdot \mathbf{I}(\mathbf{p}) - \frac{H_3(p)}{H_5(p)} \alpha(\mathbf{p}) \right] \end{aligned}$$

$$\varepsilon_3(\mathbf{p}) = H_2(p) \cdot H_3(p) \cdot \varepsilon_2(\mathbf{p}) + \mathbf{C}_{mer}(\mathbf{p})$$

$$\alpha(\mathbf{p}) = H_4(p) \cdot H_5(p) \cdot \varepsilon_3(\mathbf{p})$$

$$\alpha(\mathbf{p}) = H_4(p) \cdot H_5(p) \cdot \left[H_2(p) \cdot H_3(p) \cdot \left[\frac{1}{1 + H_1(p) \cdot H_2(p) \cdot H_6(p)} \left[H_1(p) \cdot \mathbf{K}_{sv} \cdot \mathbf{I}(\mathbf{p}) - \frac{H_3(p)}{H_5(p)} \alpha(\mathbf{p}) \right] \right] + \mathbf{C}_{mer}(\mathbf{p}) \right]$$

On en déduit donc :

$$\begin{aligned} \alpha(\mathbf{p}) &\left[1 + H_4(p) \cdot H_5(p) \cdot H_2(p) \cdot H_3(p) \cdot \frac{H_3(p)}{H_5(p)} \frac{1}{1 + H_1(p) \cdot H_2(p) \cdot H_6(p)} \right] \\ &= H_4(p) \cdot H_5(p) \cdot \left[\mathbf{C}_{mer}(\mathbf{p}) + \frac{H_1(p) \cdot H_2(p) \cdot H_3(p)}{1 + H_1(p) \cdot H_2(p) \cdot H_6(p)} \cdot \mathbf{K}_{sv} \cdot \mathbf{I}(\mathbf{p}) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \alpha(\mathbf{p}) &\left[\frac{1 + H_1(p) \cdot H_2(p) \cdot H_6(p) + H_2(p) \cdot H_3(p)^2 \cdot H_4(p)}{1 + H_1(p) \cdot H_2(p) \cdot H_6(p)} \right] \\ &= H_4(p) \cdot H_5(p) \cdot \left[\mathbf{C}_{mer}(\mathbf{p}) + \frac{H_1(p) \cdot H_2(p) \cdot H_3(p)}{1 + H_1(p) \cdot H_2(p) \cdot H_6(p)} \cdot \mathbf{K}_{sv} \cdot \mathbf{I}(\mathbf{p}) \right] \end{aligned}$$

$$\alpha(\mathbf{p}) = \frac{H_1(p) \cdot H_2(p) \cdot H_3(p) \cdot H_4(p) \cdot H_5(p)}{\underbrace{1 + H_1(p) \cdot H_2(p) \cdot H_6(p) + H_2(p) \cdot H_3(p)^2 \cdot H_4(p)}_{H_a(\mathbf{p})}} \cdot \left[\mathbf{K}_{sv} \cdot \mathbf{I}(\mathbf{p}) + \frac{1 + H_1(p) \cdot H_2(p) \cdot H_6(p)}{\underbrace{H_1(p) \cdot H_2(p) \cdot H_3(p)}_{-H_b(\mathbf{p})}} \mathbf{C}_{mer}(\mathbf{p}) \right]$$

On identifie :

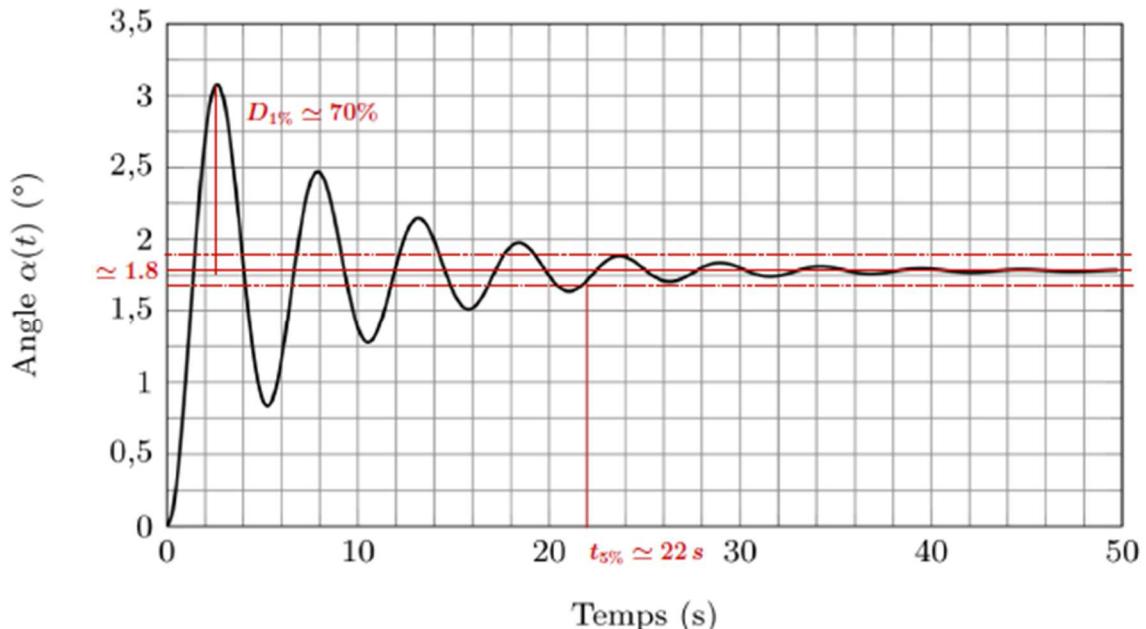
$$H_a(\mathbf{p}) = \frac{H_1(\mathbf{p}) \cdot H_2(\mathbf{p}) \cdot H_3(\mathbf{p}) \cdot H_4(\mathbf{p}) \cdot H_5(\mathbf{p})}{1 + H_1(\mathbf{p}) \cdot H_2(\mathbf{p}) \cdot H_6(\mathbf{p}) + H_2(\mathbf{p}) \cdot H_3(\mathbf{p})^2 \cdot H_4(\mathbf{p})}$$

Et

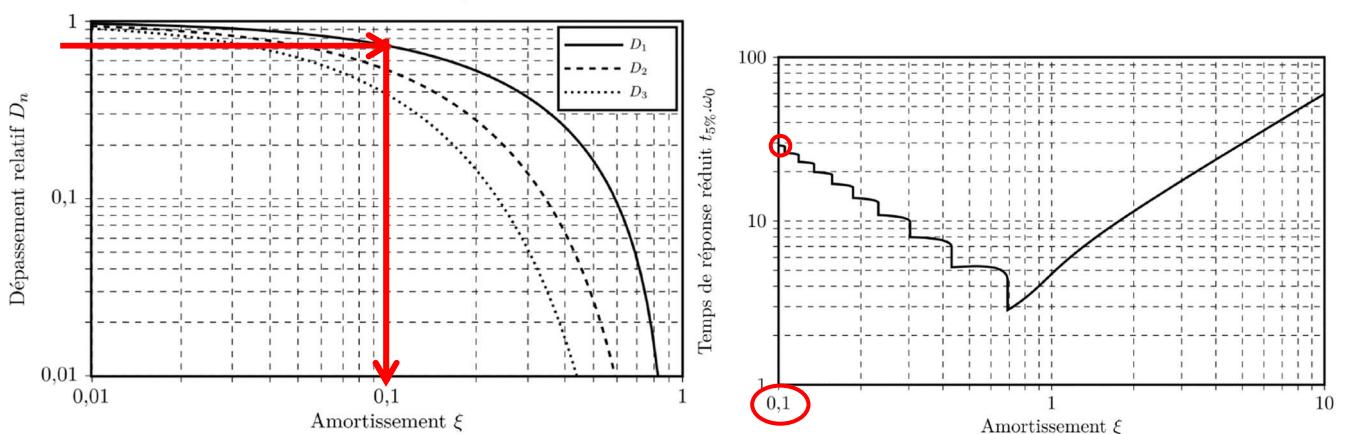
$$H_b(\mathbf{p}) = -\frac{1 + H_1(\mathbf{p}) \cdot H_2(\mathbf{p}) \cdot H_6(\mathbf{p})}{H_1(\mathbf{p}) \cdot H_2(\mathbf{p}) \cdot H_3(\mathbf{p})}$$

Question 15 Proposer un modèle de comportement de la chaîne d'action (fonction de transfert $G(p) = K_{sv}H_b(p)$) à partir de la réponse indicielle. Identifier les valeurs numériques des paramètres caractéristiques intervenant dans la fonction de transfert. Vous justifierez votre réponse en reportant les tracés nécessaires sur le document réponses. On pourra utiliser les abaques donnés en annexe 4.

La réponse à une entrée $i(t)=1A$ est oscillante, elle tend vers une valeur finie en $+\infty$, et la tangente à l'origine est de pente nulle, on propose donc un modèle du 2nd ordre $H_b(p) = \frac{K}{1 + \frac{2\xi}{\omega_0}p + \frac{p^2}{\omega_0^2}}$.



- Asymptote en $+\infty$: $K = 1,8 \text{ } ^{\circ}/A$ ($\alpha_\infty = K \cdot i_0 = 1,8^{\circ}$ avec $i_0 = 1A$)
- 1^{er} dépassement : $D_{1\%} = \frac{D_1}{\alpha_\infty} = \frac{3,1 - 1,8}{1,8} \approx 70\%$ on lit sur l'abaque : $\xi = 0,1$



- Méthode 1 : Pseudo période $T_p = \frac{2\pi}{\omega_0\sqrt{1-\xi^2}} \approx 5s \Rightarrow \omega_0 = \frac{2\pi}{T_p\sqrt{1-\xi^2}} = 1,26 \text{ rad/s}$

Méthode 2 : temps de réponse à 5% $t_{5\%} \approx 22s$ on lit sur l'abaque pour $\xi = 0,1$ $t_{5\%}\omega_0 \approx 30s$

$$\Rightarrow \omega_0 = \frac{30}{22} = 1,36 \text{ rad/s}.$$

$$\omega_0 \approx 1,3 \text{ rad/s}$$

4- Performances du système de contrôle

Question 16 Déterminer l'erreur statique associée à une entrée $\alpha_c(t)$ en échelon d'amplitude α_{c0} (avec $C_{mer} = 0$). En déduire la valeur minimale de K_p assurant le critère de précision.

$$FTBO(p) = C(p) \cdot K_{sv} \cdot H_b(p) = \frac{K_p \cdot K_{sv} \cdot K_b}{1 + 2\xi \cdot \frac{p}{\omega_0} + \frac{p^2}{\omega_0^2}}$$

La classe du système est 0, pas d'intégrateur dans la FTBO :

$$FTBO(p) = C(p) \cdot K_{sv} \cdot H_b(p) = \frac{K_p \cdot K_{sv} \cdot K_b}{1 + 2\xi \cdot \frac{p}{\omega_0} + \frac{p^2}{\omega_0^2}}$$

Par conséquent, l'erreur vaut :

$$Er_S = \frac{\alpha_{c0}}{1 + K_{BO}} = \frac{\alpha_{c0}}{1 + K_p \cdot K_{sv} \cdot K_b}$$

Pour un respect du critère de précision, on veut $Er_{S\%} < 5\%$:

$$\frac{1}{1 + K_p \cdot K_{sv} \cdot K_b} \leq 0.05$$

Soit :

$$K_p \geq \frac{0.95}{0.05 \cdot K_{sv} \cdot K_b} \text{ avec } K_{sv} \cdot K_b = 2 \text{ rad/A}$$

On en déduit donc :

$$K_p \geq 9,5 \text{ A/rad}$$

Autre méthode : d'après le théorème de la valeur finale, on a :

$$Er_S = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot (\alpha_c(p) - \alpha(p)) = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot \left(1 - \underbrace{\frac{K_p \cdot K_{sv} \cdot K_b}{1 + K_p \cdot K_{sv} \cdot K_b + \frac{2 \cdot \xi}{\omega_0} \cdot p + \frac{p^2}{\omega_0^2}}\right) \frac{\alpha_{c0}}{p}$$

$$Er_S = \left(1 - \underbrace{\frac{K_p \cdot K_{sv} \cdot K_b}{1 + K_p \cdot K_{sv} \cdot K_b}}_{K_{BF}}\right) \cdot \alpha_{c0} = \frac{\alpha_{c0}}{1 + K_p \cdot K_{sv} \cdot K_b}$$

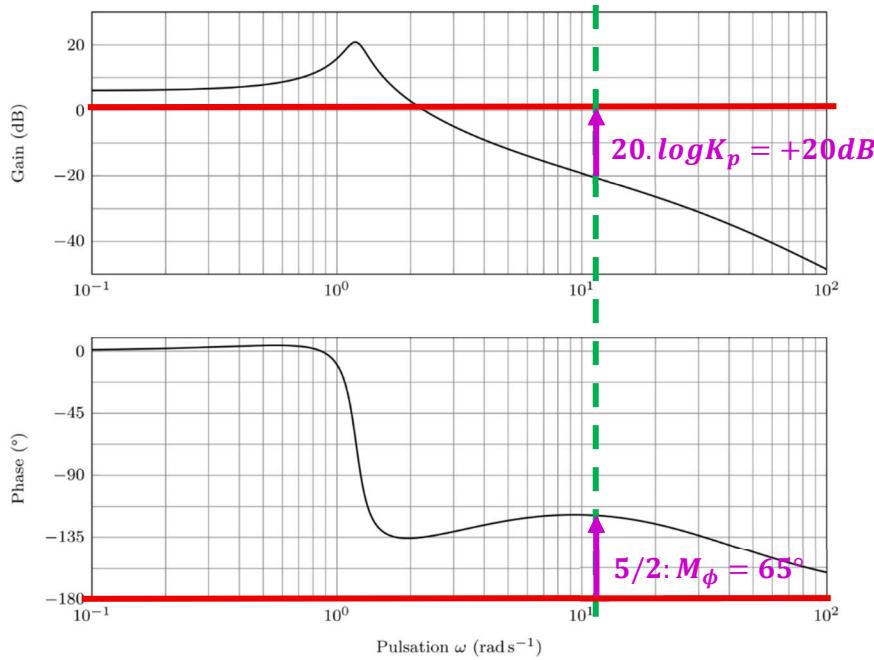
Question 17 Déterminer la valeur de K_p , permettant de respecter le critère de bande passante à 0dB (on laissera éventuellement la valeur de K_p sous la forme 10^x).

5/2 : Vérifier que le critère de marge de phase est respecté également. Les tracés seront reportés sur le document Réponses.

On impose une pulsation de coupure à 0dB $\omega_{0dB} = 10 \text{ rad/s}$, on lit sur le diagramme de Bode donné $G_{dB BO} |_{K_p=1}(\omega_{0dB} = 10 \text{ rad/s}) = -20 \text{ dB}$ (voir tracé page suivante).

Or $G_{dB BO} |_{K_p} = G_{dB BO} |_{K_p=1} + 20 \log K_p = 0 \text{ dB}$ pour $\omega_{0dB} = 10 \text{ rad/s}$, il faut donc translater la courbe de gain de $20 \log K_p = +20 \text{ dB} \Rightarrow K_p = 10 \text{ A/rad}$.

5/2 : on lit la marge de phase $M_\phi = 65^\circ$ ce qui respecte le cahier des charges.



Question 18 Donner la forme de l'expression de l'angle en régime établi $\alpha(t)$ en réponse à cette entrée sinusoïdale $C_{mer}(t)$. Compléter le tableau du Document Réponses en précisant les valeurs numériques du rapport d'amplitude α/C_{mer} (sous la forme 10^x) et du déphasage dans le cas d'un bateau avec et sans stabilisation gyroscopique pour $\omega = 1 \text{ rad/s}$ et $\omega = 10 \text{ rad/s}$. Conclure sur l'intérêt de ce système avec stabilisation gyroscopique.

Pour une entrée sinusoïdale $C_{mer}(t) = C_0 \sin(\omega \cdot t)$, $\alpha(t)$ sera de la forme :

$$\alpha(t) = \alpha_0 \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi) \quad \text{avec } \frac{\alpha_0}{C_0} = |H(j\omega)|$$

Pulsion	Rapport d'amplitude		Déphasage	
	Sans stabilisation	Avec stabilisation	Sans stabilisation	Avec stabilisation
1 rad/s	$10^{-90/20}$	$10^{-111/20}$	-25°	-20°
10 rad/s	$10^{-135/20}$	$10^{-134/20}$	-180°	-165°

Avec stabilisation, on a un amortissement de l'amplitude de roulis en basse fréquence et un faible retard pour des pulsations variantes entre 1 rad/s et 10 rad/s.

Question 19 Préciser la pulsation du moment C_{mer} notée ω_{mer} utilisée dans la simulation temporelle. Préciser l'atténuation apportée par le système de stabilisation (rapport de l'amplitude de l'angle de roulis avec stabilisation sur l'amplitude sans stabilisation) à partir de la réponse temporelle.

Entre 10 et 35 secondes, on observe 4 périodes complètes, on en déduit $\omega_{mer} = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{25/4}$

$$\omega_{mer} \approx 1 \text{ rad/s}$$

L'amplitude (crêtes à crêtes) avant stabilisation est d'environ 70°, puis après stabilisation les oscillations sont d'amplitudes de l'ordre de 7° soit une atténuation de l'ordre de $\frac{7}{70} = 0,1$.

Rapport d'amplitude que l'on peut comparer avec le rapport lu sur le diagramme de Bode

$$\frac{10^{-\frac{111}{20}}}{10^{-\frac{90}{20}}} = 10^{-\frac{111}{20} + \frac{90}{20}} = 10^{-\frac{21}{20}} = 10^{-105/200} = 0,06 \approx 0,1$$