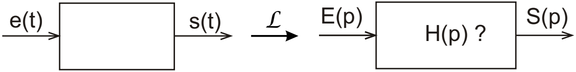
Modélisation et Performances des Systèmes Asservis

Spé MP–MP* 2025-2026

Lycée Thiers Marseille

Systèmes Asservis 1

1.1 Modélisation
Modèle de connaissance - Modèle de comportement



Modèle de connaissance

Modèle **établi** à partir de l'équation différentielle du système.

$$a_n.\frac{d^n\ s(t)}{dt^n}...+a_0.s(t) = b_m.\frac{d^m\ e(t)}{dt^m}+...+b_0.e(t)$$

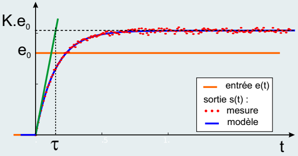
$$\downarrow L$$

$$(a_n.p^n... + a_0).S(p) = (b_m.p^m + ... + b_0).E(p)$$

$$\boxed{H(p)=\frac{S(p)}{E(p)} = \frac{b_0 + ... + b_m.p^m}{a_0 + ... + a_n.p^n}}$$

Modèle de comportement

Modèle **proposé** par **identification** à partir de la réponse temporelle s(t) :



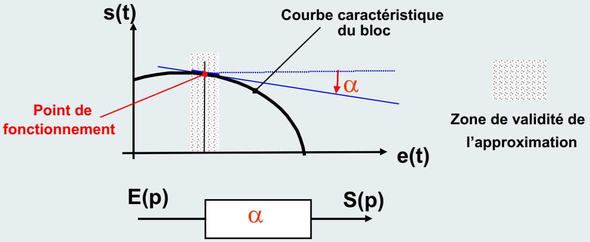
$$\boxed{H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{K}{1+\tau.p}}$$

Remarque : Le système étudié est dit **causal** (n $\geq$ m) : la sortie à un instant donné n'est pas influencée par le futur de l'entrée.

La loi Entrée-sortie d'un mécanisme est souvent non linéaire.

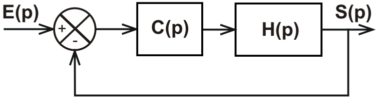
Linéarisation autour d'un point de fonctionnement

On recherche un modèle linéaire dans une zone limitée autour du point "d'intérêt", on prend comme modèle approché la tangente à la courbe en ce point appelé point de fonctionnement.



1.3 Modélisation
Schéma minimal à retour unitaire - Équation caractéristique - Pôles

Tout schéma-blocs d'un asservissement bien réglé peut se mettre sous la forme d'un schéma minimal à retour unitaire



Fonction de Transfert en Boucle Ouverte/Fermée

$$\boldsymbol{FTBO(p) = \frac{Mes(p)}{\varepsilon(p)} = C(p).H(p)} \qquad \boldsymbol{FTBF(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{C(p).H(p)}{1 + C(p).H(p)} = \frac{FTBO(p)}{1 + FTBO(p)}}$$

si retour unitaire

Équation caractéristique et pôles de la Fonction de Transfert en Boucle Fermée

Une fonction de transfert s'écrit toujours sous la forme $F(p) = \dfrac{N(p)}{D(p)}$.

$\mathbf{D(p) = 0}$ est l'**équation caractéristique** de F(p). Les **racines de D(p)** sont les **pôles** de F(p).

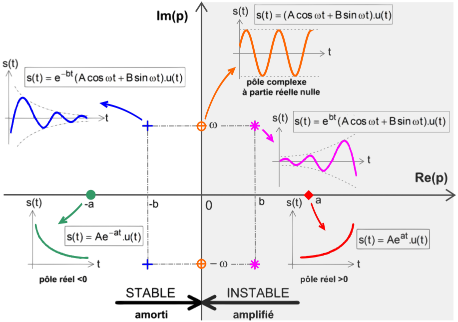
$$\boxed{\mathbf{1 + FTBO(p) = 0 \text{ est l'équation caractéristique de } FTBF(p)}}$$

Stabilité BIBO : Entrée Bornée-Sortie Bornée

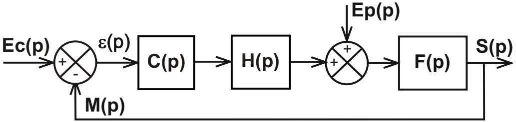
Un système est stable si l'application d'un signal borné (entrée ou perturbation) produit un signal de sortie borné.

Stabilité asymptotique

Un système est asymptotiquement stable si, et seulement si, tous les pôles de sa fonction de transfert (FTBF(p)) sont à partie réelle strictement négative.



2.2 Stabilité asymptotique
Prise en compte de la perturbation



$$S(p) = \frac{C(p).H(p).F(p)}{1 + C(p).H(p).F(p)}.E_c(p) + \frac{F(p)}{1 + C(p).H(p).F(p)}.E_p(p)$$

Équation caractéristique et pôles de la Fonction de Transfert en Boucle Fermée

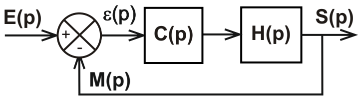
Avec ou sans perturbation l'**équation caractéristique** de FTBF(p) est :

$$\mathbf{1 + C(p).H(p).\ F(p) = 1 + FTBO(p) = 0}$$

La FTBO est indépendante de la perturbation.
Les pôles de la FTBF sont indépendants de la perturbation.

Conclusion : La stabilité n'est pas influencée par les perturbations.

3.1 Précision sous condition préalable de stabilité
Tableau de l'erreur statique



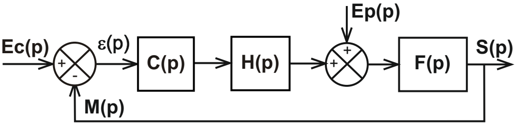
$$\text{FTBO(p)} = \text{C(p).H(p)} = \frac{K_{BO}}{p^{\alpha}} \cdot \frac{1 + \ldots + b_m.p^m}{1 + \ldots + a_n.p^n}$$

K_{BO} **: gain en Boucle Ouverte,** α **: nombre d'intégrateurs** dans la boucle = **classe** du système

Erreur statique totale en régime stationnaire

$$E_{R\infty} = \lim_{t \to +\infty} (e(t) - s(t)) = \lim_{p \to 0} p.(E(p) - S(p))$$

Nature de l'entrée		**Classe du système**				
e(t)	E(p)		$\alpha = 0$	$\alpha = 1$	$\alpha = 2$	$\alpha > 2$
$e_0.u(t)$	$\dfrac{e_0}{p}$	E_{RS} :	$\dfrac{e_0}{1 + K_{BO}}$	0	0	0
$a.t.u(t)$	$\dfrac{a}{p^2}$	E_{RV} :	∞	$\dfrac{a}{K_{BO}}$	0	0
$a.t^2.u(t)$	$\dfrac{a}{p^3}$	E_{RA} :	∞	∞	$\dfrac{a}{K_{BO}}$	0



$$C(p).H(p) = \frac{K_H}{p^{\alpha_H}} . \frac{1 + ... + b_m.p^m}{1 + ... + a_n.p^n}$$

$$F(p) = \frac{K_F}{p^{\alpha_F}} . \frac{1 + ... + c_M.p^M}{1 + ... + d_N.p^N}$$

FTBO (p)= C(p).H(p).F(p) avec $\boldsymbol{K_{BO} = K_H.K_F}$

Erreur statique totale en régime stationnaire

$$\lim_{p \to 0} p.(E_c(p) - S(p)) = \underbrace{\lim_{p \to 0} p.E_c(p) \left(1 - \frac{C.H.F}{1 + C.H.F}\right)}_{\textit{Erreur système non perturbé}} - \underbrace{\lim_{p \to 0} p.E_p(p). \frac{F}{1 + C.H.F}}_{\textit{Influence de la pertubation}}$$

Pour une perturbation de type échelon :

$$e_p(t) = e_p.u(t)$$

on ajoute à l'erreur statique calculée précédemment l'influence de la perturbation $E_{RS\,pert}$.

$E_{R\,pert\infty}$	$\alpha_H = 0$	$\alpha_H > 0$
$\alpha_F = 0$	$\dfrac{-e_p.K_F}{1 + K_F.K_H}$	0
$\alpha_F > 0$	$\dfrac{-e_p}{K_H}$	0

4.1 Rapidité - Temps de réponse à 5 %
Rappels

1er ordre

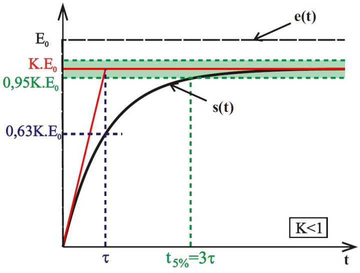
$$H(p) = \frac{K}{1+\tau.p}$$

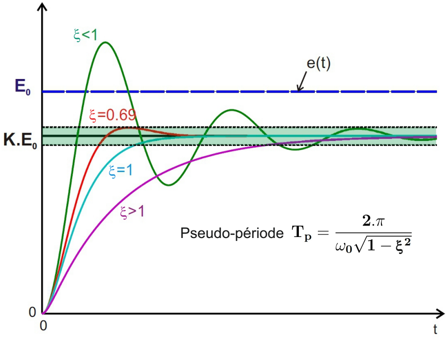
$$t_{5\%} = 3.\tau$$

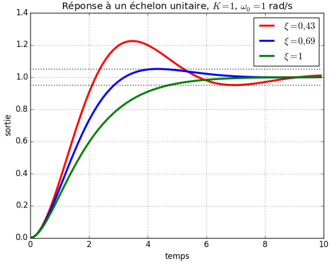
2nd ordre

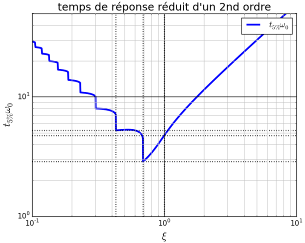
$$H(p) = \frac{K}{1+\frac{2.\xi}{\omega_0}.p+\frac{1}{\omega_0^2}.p^2}$$

$t_{5\%} \rightarrow$ abaque $t_{5\%}.\omega_0 = f(\xi)$



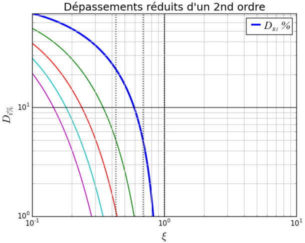






Réglage d'un système du 2^{nd} ordre asservi

ξ	0	0,43	0,69	1	>1
$t_{5\%}.\omega_0$	∞	5,3	3	4,7	grand
D_{R1} en %	100	20	5	0	0



Pôles Dominants

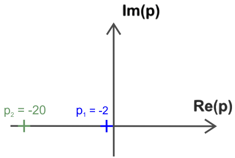
Les pôles du système les plus proches de l'axe des imaginaires sont qualifiés de pôles dominants, ils ont une contribution prépondérante sur la réponse du système.

Exemple 1

$$T(p) = \frac{1}{(1+0,5.p).(1+0,05.p)}$$

$$T_1(p) = \frac{1}{(1+0,5.p)} \text{ avec } \tau_1 = 0,5s,\ p_1 = -2$$

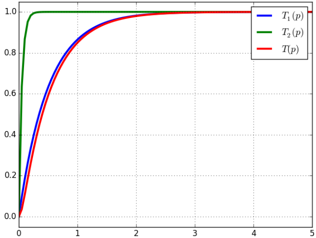
$$T_2(p) = \frac{1}{(1+0,05.p)} \text{ avec } \tau_2 = 0,05s,\ p_2 = -20$$



$$\tau_1 >> \tau_2$$

$$\boxed{T(p) = \frac{1}{(1+\tau_1.p).(1+\tau_2.p)} \approx \frac{1}{(1+\tau_1.p)}}$$

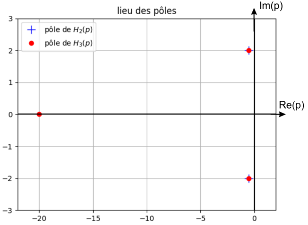
p_1 est un **pôle dominant** par rapport à p_2

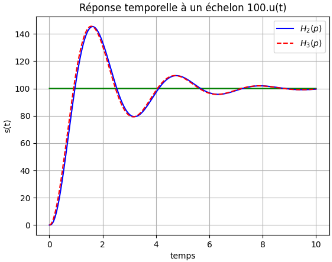


Exemple 2

$H_2(p) = \dfrac{1}{1 + 0,24.p + 0,24.p^2}$, pôles complexes conjugués : $p_{12} = -0,5 \pm 2.j$

$H_3(p) = \dfrac{1}{(1 + 0,05.p).(1 + 0,24.p + 0,24.p^2)}$, pôles : $p_{12} = -0,5 \pm 2.j,\ p_3 = -20$





$$\boxed{H_3(p) = \frac{1}{(1 + 0,05.p).(1 + 0,24.p + 0,24.p^2)} \approx \frac{1}{1 + 0,24.p + 0,24.p^2}}$$

p_1 et p_2 sont les **pôles dominants**, ils imposent le comportement du système.